

1. 2
2. 11
3. 14
4. 20
5. 22
6. 28
7. 33
8. 34
9. 37
10. 39
11. 43
12. 45
13. 47
14. 50
15. 52
16. 56
17. 57
18. 59
19. 62
20. 63
21. 66
22. 68
23. 71
24. 73
25. 76
26. 79
27. 81
28. 84
29. 87
30. 90
31. 93
32. 95
33. 98
34. 100
35. 103

"Механика" С.Н. Никитин, С.С. Чисанов.

Понятия классической механики.

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь

Абсолютно твердое тело - система матер. точек, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным.

Сплошная среда - среда, в которой вещество распределено непрерывно.

Пример тела, которое можно рассм. как ~~мат.~~ матер. точку, абс. тв. тело и спл. среду: Диск на подвесе.

§ Кинематика материальной точки

Кинематика - раздел механики, в котором изучено движение тел без расск-ий причин двиг.

Мех. дв-ие - перемещ. одного тела, отн-но другого.

Тело, относит к-го рассм. движк. наз-ет телом отчета.

Задача кинематики состоит в мат-ки точном описании движения тела.

Измерение расстояний и промежутков времени:

Чтобы измерить раст-ие, нужно сравнить его с длиной тела, принятого за эталон.

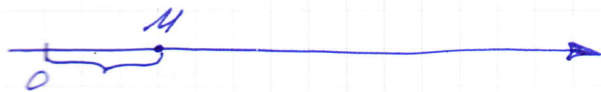
Чтобы измерить любую др. величину, нужно ввести ед. изм-ия. В системе СИ единица раст-ия - метр.

Метр - раст-ие, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $3 \cdot 10^{-8}$ с.

Чтобы измерить промежутки времени, нужно сравнить

но с протект. процесса, принятого за эталон.

Сигнада - это протект. процессу 10^{10} колебаний электромагн. в атомне узел (АУ).



$x[m]$ - расстояние

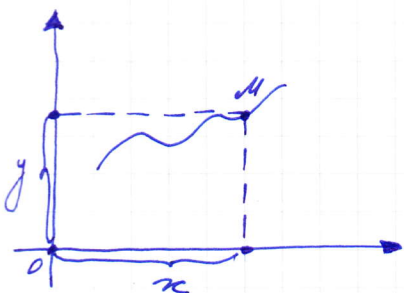
$t[s]$ - время

Закон движения точки по прямой:

$$x = x(t)$$

Ось координат - прямая линия, на которой выбрано начало отсчета, полож. напр. и единица изм-ия длины.

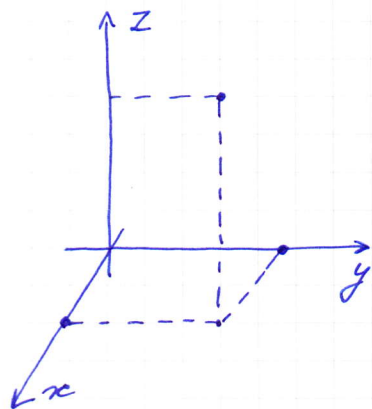
Движение точки на плоскости.



Закон движения: $x = x(t)$ - декартовы
 $y = y(t)$ координаты

Декартова сист. коорд.

Движение точки в пр-ве:



$x(t)$
 $y(t)$
 $z(t)$

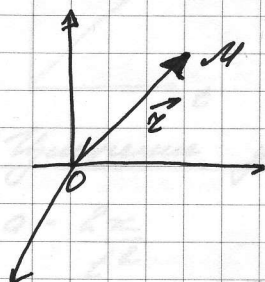
Траектория - линия, по которой движется точка.

Путь - длина траектории.

векторная

Система отсчета - система координат и часок

Радиус-вектор - вектор, соединяющий начало отсчета с данной мат. точкой.



Обозн: $\vec{r}$

Закон движ: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

начало

Орты - единичные векторы, направл. вдоль декартовых систем координ.

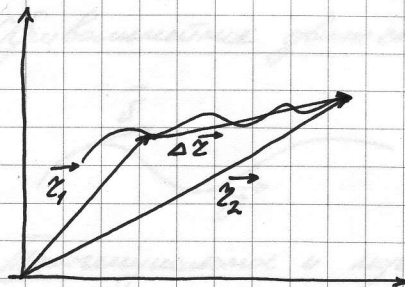
$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

декартова
координат

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (м).}$$

Обозначим $\forall \vec{a} : a \equiv |\vec{a}|$

Перемещение - это разность радиус-векторов точки, взятых в два разнотк момента времени



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

Длительность перемещения $\Delta t = t_2 - t_1$

Скорость - отношение перемещения точки к его длительности в пределе, когда длительность стр-ст к 0.

Обозн: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Скорость - производная радиус-вектора точки по времени.

Обозн: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Обозначение $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$

Декартовы компоненты скорости - величины, которые определяются формулой $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$

Модуль скорости: $|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad [\text{м/с}]$$

Ускорение - производная скорости по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

Декартовы компоненты ускорения:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad [\text{м/с}^2]$$

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

$$\vec{a} = a \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad [\text{м/с}^2]$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Равноускоренное движение точки по прямой

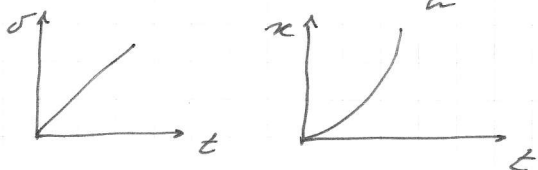
$$a = \text{const}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const} \Rightarrow v = at$$

$$v = \frac{dx}{dt} = at \Rightarrow dx = at dt$$

$$x = \int dx = a \int_0^t t dt = \frac{at^2}{2}$$

$$v = at \quad x(t) = \frac{at^2}{2}$$



Ускорение

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

Свободное падение тел. - движение тела под действием одной только силы тяжести.

Опыт: $x \sim t^2$

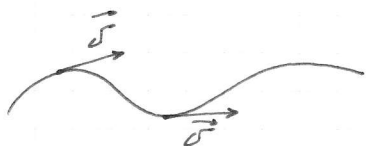
$$a = 9,8 \text{ м/с}^2$$

Ускорение свободного падения:

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}$$

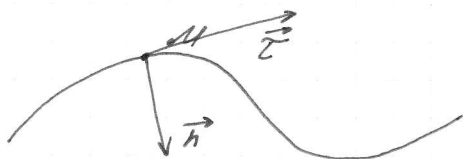
Криволинейное движение точки.



Тангенциальное и нормальное ускорение

Т.у. - составляющая ускорения точки, параллельная вектору скорости.

Н.у. - составл.-ая ускорения, перпенд. скорости точки и напр. к центру криволиней траектории.

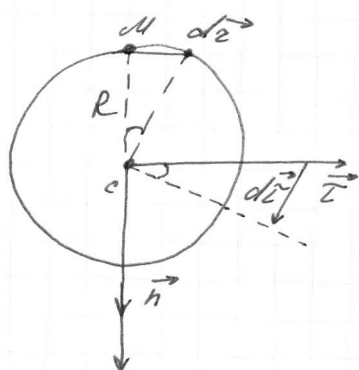


$$|\vec{v}| = 1$$

$$|\vec{a}| = 1$$

$$\vec{a} = \underbrace{\tilde{c}}_{m.y.} \vec{a}_\tau + \underbrace{\vec{n}}_{N.Y.} a_n$$

Круг кривизной кривой в точке - круг, проходящий через данную точку M кривой и две другие точки кривой N и P в пределе, когда $M \rightarrow N$, $N \rightarrow M$, $P \rightarrow M$.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{v} = \frac{\vec{c}}{\sigma} \Rightarrow \vec{c} = \vec{v}\sigma$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\sigma) = \vec{v} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$d\vec{v} = \vec{n} |d\vec{v}|$$

$$|d\vec{v}| = d\tilde{c} = ?$$

$$\frac{d\tilde{c}}{\sigma} = \frac{d\tilde{c}}{R} \Rightarrow d\tilde{c} = \frac{\sigma d\tilde{c}}{R} = \frac{d\tilde{c}}{R}$$

$$\vec{a} = \vec{v} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{n} \frac{1}{R} \frac{d\tilde{c}}{dt} = \vec{n} \frac{\sigma}{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{v} \frac{d\sigma}{dt} + \vec{n} \frac{\sigma^2}{R}}$$

$$a_\tau = \frac{d\sigma}{dt}, \quad a_n = \frac{\sigma^2}{R}, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Синимар

Андрева Мария Сергеевна.

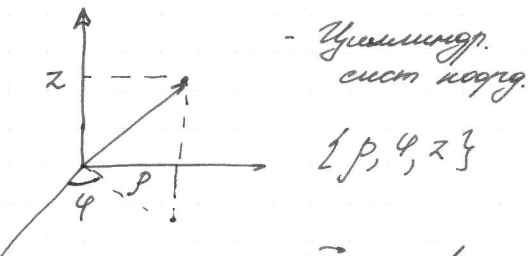
1. Стрижков С.П. "Механика"
2. Матвеев А.Н. "Механика и теор. отн-ти"
3. Олеховский И.И. "Курс теор. мех. для физиков"

1. Сборник задач Механика Д.В. Сивухин

2. Уродов И.С., ... "Сборник задач"

Д/з повторить школьный курс физики
раздел "Механика" - кин. зак. сопр-ия.
дин

Кинематика

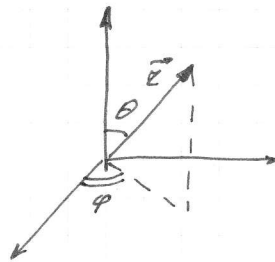


- Цилиндрич.
сист координ.

$\{\rho, \varphi, z\}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

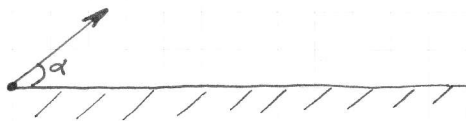
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$



- Сферическая
система координ.

$\{r, \varphi, \theta\}$

МТ



$\vec{F}_{\text{супр. возг}} \sim \vec{v}$

$h_{\text{max}} = ?$
 $\kappa_0 = ?$
 $\kappa(t) = ?$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{супр}}$$

$$\vec{F}_c = k\vec{r} = k\vec{x} = i k x + j k y$$

$$\text{ок: } m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} = -kx \rightarrow x(t)$$

$$\text{ог: } \ddot{y} = -g - \kappa y \rightarrow y(t)$$

$y(x)$ - ур-ие траект.

$$\int \ddot{x} e^t dt = -k \int \dot{x} e^t dt$$

$$\dot{x} e^t + C_1 = -kx \quad t=0 \quad v_0 \cos \alpha + C_1 = 0$$

$$~~x + C_2 = -\frac{1}{k}~~$$

$$C_1 = -v_0 \cos \alpha$$

$$~~x + C_2~~$$

$$v = \dot{x}$$

$$\dot{v} = -kv$$

$$\frac{\dot{v}}{v} = -k$$

$$\frac{1}{v} dv = -k dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$\ln|v| = -kt + C \quad t=0 : \ln(v_0 \cos \alpha) = C$$

$$\ln \left| \frac{dx}{dt} \right| = -kt + C$$

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = e^{-kt+C} = e^{-kt} \cdot C_1, \quad C_1 > 0$$

$$dx = C_2 e^{-kt} dt, \quad C_2 \neq 0$$

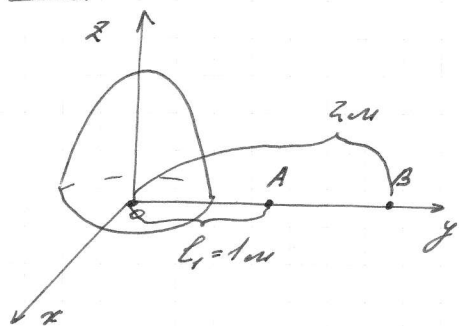
$$x = C_2 \int e^{-kt} dt = \frac{C_2}{-k} \int e^{-kt} d(-kt) = \frac{C_2}{-k} e^{-kt} + C_3$$

$$t=0 : 0 = -\frac{v_0 \cos \alpha}{k} + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{v_0 \cos \alpha}{k}$$

$$x = \frac{-v_0 \cos \alpha}{k} (e^{-kt} - 1)$$

$$y'' = -k \left(\underbrace{\frac{g}{k}}_{y_1} + y \right)$$

ω2



$$v \sim \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$v_1 = 2 \text{ cm/s}$$

$$1) \dot{y} = \frac{k}{y}$$

$$2) y = l_1, \dot{y} = v_1 \text{ at } A$$

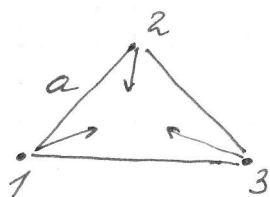
$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}, \quad dy = \frac{k dt}{y}, \quad y dy = k dt, \quad \frac{y^2}{2} = kt + C,$$

$$y = \sqrt{2kt + C}$$

$$y(0) = l_1, \quad \sqrt{C} = 1, \quad k = v_1^2 C = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\dot{y}(0) = v_1, \quad C = 1$$

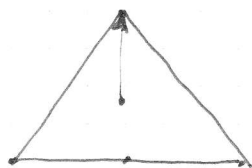
ω3



- радиус-вектор. меняется

$$|\vec{v}| = \text{const}$$

Углы радиус-вектора с осью координат
в начале пр. координат



$$|\vec{r}(t)| = \rho(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$v_2 = \dot{\rho} = -v \cos \frac{\pi}{6}$$

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = v \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\dot{\rho} = -v \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho \dot{\varphi} = \frac{v}{2}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\ln \rho}{\rho} = -\sqrt{3} \varphi$$

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = \rho_0 - \frac{v\sqrt{3}}{2} t$$

$$t = \frac{2a}{3v}$$

§2 Принцип относительности

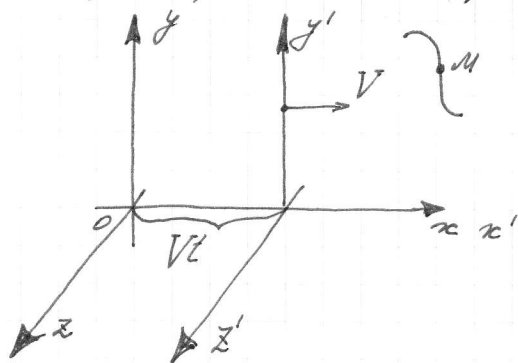
Преобразования Галилея и прибор Лоренца.

Принцип от Галилея

Предположим, мы стоим в поезде внутри данной системы отсчета. Нельзя узнать, движется ли эта система в соот-ии покоя или равномерно, прямолинейно движется.

Математич. формула:

Уравнения, описывающие движ. закона, должны быть инвар. отн-но преобраз., связыв. переход от неподвижн. сист. отсчета к системе, движущейся равномерно.



$$\begin{aligned}x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z'\end{aligned}$$

Преобразования Галилея.

$$\begin{aligned}v_x &= v_{x'} + V \\ v_y &= v_{y'} \\ v_z &= v_{z'}\end{aligned}$$

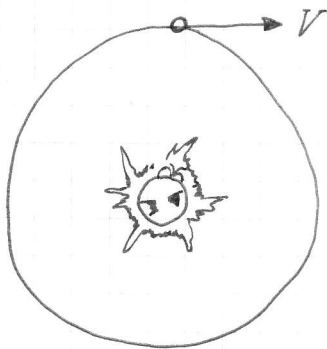
Правила Галилея

$$v_{\text{обс}} = v_{\text{отн}} + v_{\text{сист}}$$

В середине XIX в. выяснилось, что ур-ие э/м поле не инвариантно относительно преобразований Галилея.

Чтобы разрешить противоречие, было решено проверить правила сложения скоростей Галилея для световых волн.

Опыт Майкельсона:



$$\begin{aligned}V &= 3 \cdot 10^4 \text{ м/с} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}\end{aligned}$$

Гипотеза неподвижного эфира:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v_x' + V \quad ; \quad v_y = v_y' \end{cases}$$

$\swarrow$ $\nwarrow$
 отн. Солнца отн. Земли

Продольная скорость света:

$$v_{||} = |v_x'|, \quad v_y' = 0$$

$$v_{||} = c \pm V$$

$$v_{||} \neq v_{\perp} (!)$$

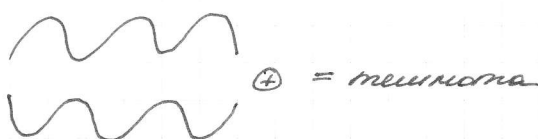
Поперечная скорость света:

$$v_{\perp} = |v_y'|, \quad v_x' = 0$$

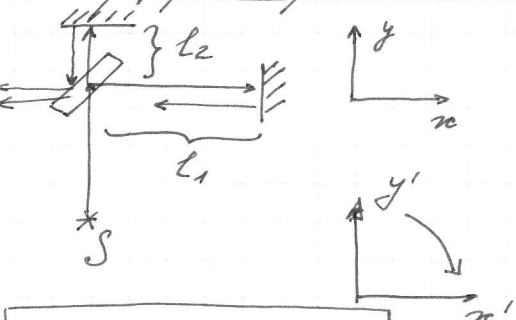
$$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - V^2}$$

Для сравнения этих скоростей Майкельсон решил использовать явление интерференции света.

Интерференция - взаимная качеств. действия световых волн в некоторых точках пр-ва (свет + свет = темнота)



Интерферентметр Майкельсона



$$\underbrace{\frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V}}_{\text{продольн. путь}} = \underbrace{\frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}}_{\text{попереч.}} - \text{свет}$$

$$\frac{l_2}{c-V} + \frac{l_2}{c+V} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} + \frac{T}{2} - \text{темнота}$$

$T = \frac{1}{\nu}$ - период свет. колебаний

$$l_1 \sim l_2 = \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{c}{V} \right)^2$$

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ - длина свет. волны

В результате опыта выясн., что при поворотах прибора интерференц. картина не изменяется.

Майкельсон сделал вывод: гипотеза неподв. эфира неверна.

Принцип постоянства скорости света

Скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета, покоящейся или движущейся, она определена.

$$\boxed{v_{\text{свет}} = v_{\text{отн}} = c} \quad (!)$$

Относительность времени

$\kappa = ct$ - скорость р/м движ в инерц. сист отсчета

$$\kappa = ct' \quad t' \neq t$$

Основная идея теории относит.: движение влияет на время

Найдем преобраз, удовл. принципу отн-ти времени

$$\kappa, y, z, t \longleftrightarrow \kappa', y', z', t'$$

Попробуем линейное преобраз.

Обратное преобраз.

$$\begin{cases} \kappa = \kappa' + Vt' \\ t = t' + \frac{\kappa' V}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa' = \kappa - Vt \\ t' = t - \frac{\kappa V}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= ct \\ \kappa' &= ct' \quad (!) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa' &= ct' \\ \kappa &= ct \quad (!) \end{aligned}$$

Для того чтобы преобраз стали обратными, введем в них постоянные коэффициенты.

Преобразования Лоренца

$$\kappa = \frac{\kappa' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + \kappa' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Окажется, что уравнения Э/М поля инвариантны отн-ти преобр-ий Лоренца.

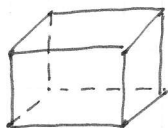
Принцип отн-ти Эйнштейна

Уравнения, описывающие физические законы, должны быть инвар. отн-ти преобразованиям Лоренца.

§ Кинематика твердого тела

Поступательное движение - движение, при котором ориентация тела в пространстве не меняется.

При таком движении скорости всех точек тела одинаковы.

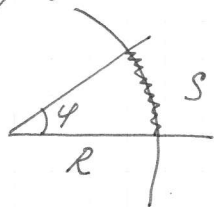


$$v_i = v$$

Вращение вокруг неподвижной оси - движение при котором все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Ось вращения - прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела.

Угол в радианах:



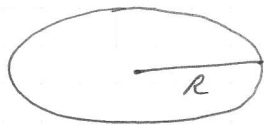
$$\varphi = \frac{S}{R} \Rightarrow S = R\varphi$$

Угловая скорость вращения тела - производная угла поворота тела по времени.

Обозн: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$

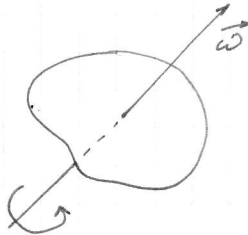
Связь линейной и угловой скоростей:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$



$$\boxed{v = \omega R}$$

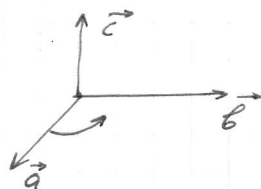
Вектор угловой скорости - вектор, направл. вдоль оси вращения тела по правилу правого винта, модуль кот равен произв. угла поворота тела по времени.



Векторное произв векторов - это вектор, перпендикулярный плоскости сошмощит., направл. по правилу правого винта.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = c = ab \sin \alpha$$



Вращение для вектора скорости в любой точке вращ. тела

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \vec{r} - \text{радиус-вектор точки}$$

$$v = \omega r \sin \alpha$$

Движение тела с одной неподв. точкой

Теорема Гюльера - движение тела с одной неподв. точкой в любой момент времени можно рассм. как вращ. вокруг неподв. оси, проходящей через точку закрепл.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

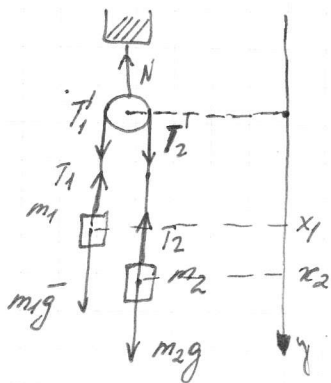
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

Мгновенная ось вращ. тела - прямая линия, на которой нах. неподв. точки в данный момент точки тела.

Семинар

- 1) Выбор модели.
- 2) Расставить все силы.
- 3) Проанализ. возм. движ.
- 4) Выбор системы коорд.
- 5) Запис. ур-ие движ.
- 6) Допол. ур-ниями из дан. условий.
- 7) Анализ решения. (рассм. предельн. случаи)

ЗЗ1



$N = ?$

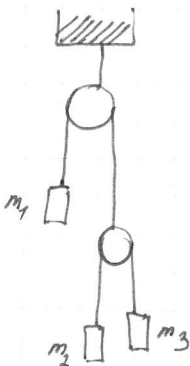
$$\begin{cases} T_1' + T_2' - N = 0 \\ m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = -m_2 a_2 \\ x_1 + x_2 + \pi R = L \Rightarrow a_1 = -a_2 = a \\ T_1 = T_2 = T \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)g - N = (m_1 + m_2)a \\ (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \end{cases}$$

$$N = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

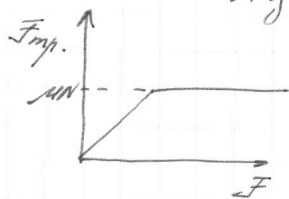
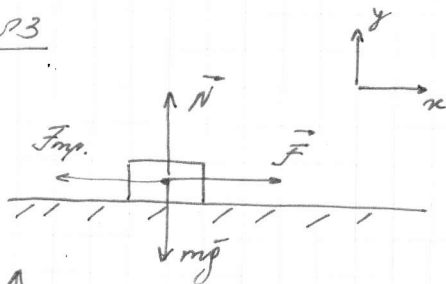
ЗЗ2



$a_1, a_2, a_3 = ?$

(2/3)

ЗПЗ



$$F_{fr} = \begin{cases} F, & F \leq \mu N \\ \mu N, & F > \mu N \end{cases}$$

$$\vec{F}_{fr} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_{fr} + m\vec{g} + \vec{N}$$

$$Ox: F - F_{fr} = max$$

$$Oy: N - mg = 0$$

$$F_{fr} = \mu mg$$

$$F - \mu mg = max$$

$$\alpha \left(t - \frac{m\mu g}{\alpha} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\checkmark 4 \quad t=0 \quad \vec{F} = \vec{a}t \quad \vec{a} = \text{const}$$

Найти S - путь за t после
нач. движения

$$\alpha t - \mu mg = m \ddot{x}$$

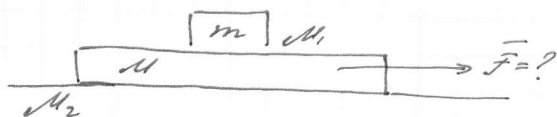
$$\frac{\alpha t}{m} - \mu g dt = dx$$

$$\frac{\alpha t^2}{2m} - \mu g t + C_1 = x$$

0 из нач. усл

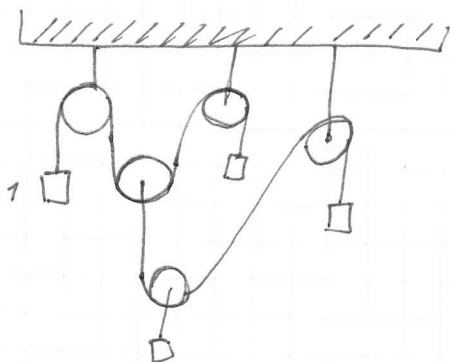
$$\frac{\alpha t^3}{6m} - \frac{\mu g t^2}{2} + C_2 = x$$

ЗПЗ



Какая сила нужна чтобы
затянуть доску вверх.

ЗП4



Лекция 3

Матрица поворота тела

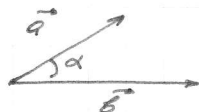
Матрица, позволяющая описать поворот тела в пространстве.

Матрица поворота составл. из скалярных произведений орта 2-х коорд. сист.: лабораторной системы и системы, связ. с телом.

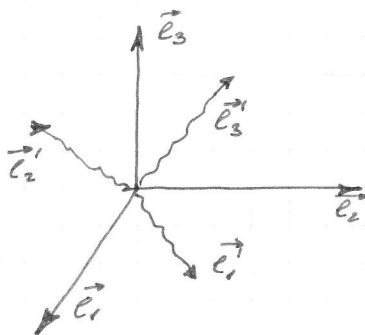
$$S = \vec{e}_i \vec{e}_j' = S_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Скалярное произв. вект. - произв. модулей векторов на cos угла между ними.

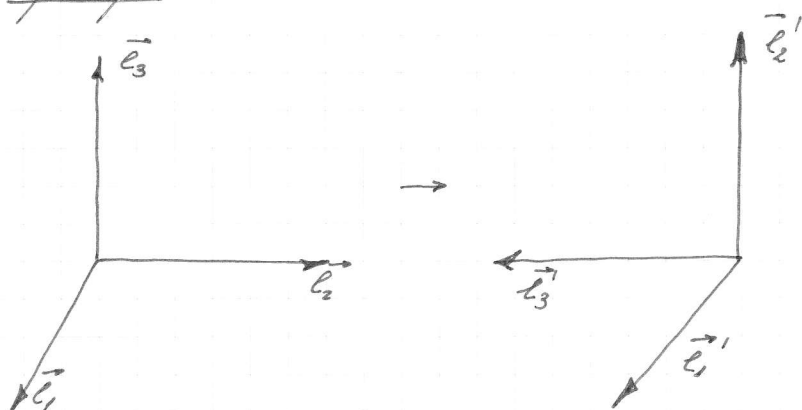
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} = ab \cos \alpha$$



$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}_1' & \vec{e}_1 \vec{e}_2' & \vec{e}_1 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_2 \vec{e}_1' & \vec{e}_2 \vec{e}_2' & \vec{e}_2 \vec{e}_3' \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1' & \vec{e}_3 \vec{e}_2' & \vec{e}_3 \vec{e}_3' \end{pmatrix}$$

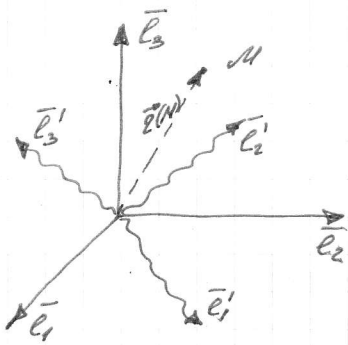


Пример:



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование компонент вектора при повороте системы коорд.



$$\vec{r} = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \kappa_3 \vec{e}_3 =$$

$$= \kappa_1' \vec{e}_1' + \kappa_2' \vec{e}_2' + \kappa_3' \vec{e}_3'$$

Умножим это рав-во скалярно на e_1 .

$$\kappa_1 = \vec{e}_1' \vec{e}_1 \kappa_1' + \vec{e}_2' \vec{e}_1 \kappa_2' + \vec{e}_3' \vec{e}_1 \kappa_3'$$

$$\kappa_1 = S_{11} \kappa_1' + S_{12} \kappa_2' + S_{13} \kappa_3'$$

$$\kappa_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \kappa_j' \Rightarrow \boxed{\kappa_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \kappa_j'}$$

Двойной поворот тела

$$\kappa_i = \sum_j A_{ij} \kappa_j', \quad \kappa_j' = \sum_k B_{jk} \kappa_k'' \Rightarrow \kappa_i = \sum_j A_{ij} \sum_k B_{jk} \kappa_k''$$

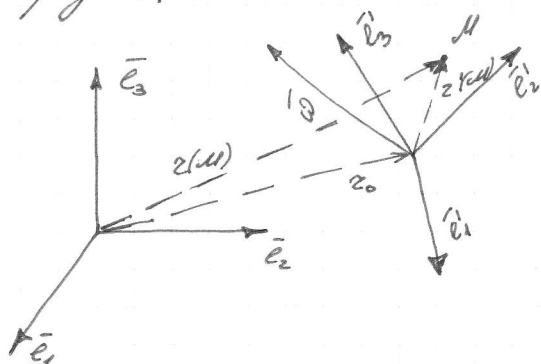
$$= \sum_k \kappa_k'' \underbrace{\sum_j A_{ij} B_{jk}}_{C_{ik}} = \sum_k C_{ik} \kappa_k'', \text{ где } C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}$$

§4 Кинематика вращающихся систем отсчета.

В этом параграфе мы найдем связь кинематич. карт-к точки относит. двух систем: неподв. и вращ.

Будем считать, что начало вращ. с. отсчета может двигаться.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

Связь перемещений

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$$

$$d\vec{r}' = \underbrace{\vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3'}_{d'\vec{r}'} + x_1' d\vec{e}_1' + x_2' d\vec{e}_2' + x_3' d\vec{e}_3'$$

$$\S 3 \rightarrow \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt$$

$$d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] dt$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

$$d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] dt$$

$$dr = d\vec{r}_0 + d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

$$d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] dt$$

Связь скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] dt$$

Общее ускорение

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{z}'] \quad , \quad \vec{\omega} = \text{const}$$
$$d\vec{z}' = d'\vec{z}' + [\vec{\omega}, \vec{z}'] dt$$
$$d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt$$

аналогично

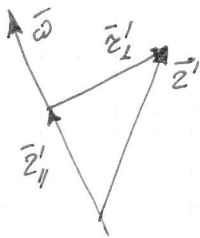
$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] dt + [\vec{\omega}, d'\vec{z}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{z}']] dt$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{z}']]$$
$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$$
$$\vec{a} \quad \vec{a}_0 \quad \vec{a}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k \quad , \quad \text{где} \quad \vec{a}_n = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{z}']] \text{ - переносное ускорение}$$

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] \text{ - кориолисово ускорение}$$

Преобразуем переносное ускорение:



$$\vec{z}' = \vec{z}'_{||} + \vec{z}'_{\perp}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{z}'] = [\vec{\omega}, \vec{z}'_{||}] + [\vec{\omega}, \vec{z}'_{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{z}'_{\perp}]$$

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{z}'_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{z}'_{\perp}) - \vec{z}'_{\perp}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) =$$

$\stackrel{=0}{=}$

$$= -\vec{z}'_{\perp} \omega^2 = \vec{a}_{y.c} \text{ - центростремительное}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{z}'_{\perp}$$



$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$$

§ 5 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона

Всё тело сохраняет состояние покоя или равн. движ. до тех пор, пока другие тела не воздейств. на изменить это сост.

Второй закон Ньютона

Гравит. масса мат. точки на ускорение равно действ. на неё силе.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Третий закон Ньютона

Действие двух тел друг на друга равные и противоположн. напр-я.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Опр. Центральный сист. отсчета - система, отн. которой любое тело, бесконечно удал. от других тел не испытывает ускорения.

Опыт показ, что система отсчета, связ. с Землей явл. инерциальной, но крайней мере приближ.

Сила и масса

Опр. Масса - мера инертности тела на действие силы.

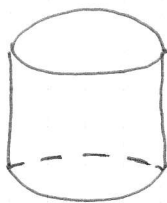
Опр. Сила - мера действия на данное тело других тел.

$\vec{F}$, m .

Измерение силы и массы

Введем единицу изм. масс.

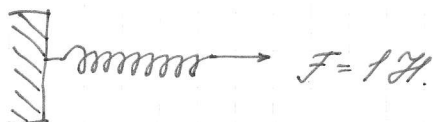
Опр. Килограмм - масса эталонного тела, предст. собой цилиндр и снава Pt и Ir диаметром 39 мм и такой же высотой.



$$m_{Эт} = 1 \text{ кг}$$

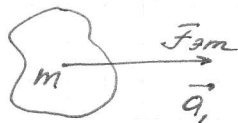
Опр. Ньютон - сила, вызыв. ускорение в 1 м/с^2 у тела массой в 1 кг .

$$F_{Эт} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ Н}$$



Измерение масс.

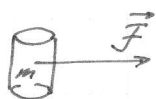
Чтобы измерить массу тела, действуем на него силой в 1 Н и измеряем ускорение.



$$m = \frac{F_{Эт}}{a_1} = \{ a_1 = 2 \text{ м/с}^2 \} = 0,5 \text{ кг}$$

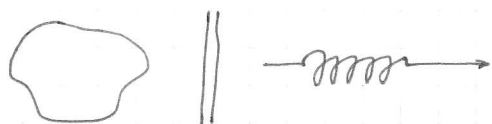
Измерение силы

Чтобы измерить силу, действуем ей на тело массой 1 кг .



$$F = m_{\text{эл}} a_2 = \{ a_2 = 3 \text{ ч/с}^2 \} = 3 \text{ Н}$$

Опытная проверка II закона



$$m = 0,5 \text{ кг}$$

$$F = 3 \text{ Н}$$

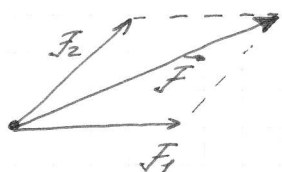
$$a = \frac{F}{m} = 6 \text{ ч/с}^2 = a_{\text{теор.}}$$

Второй закон Ньютона теряет силу в усл-иях:

- 1) тело движт со скоростью близкой к скорости света
- 2) микроскопически малые тел. движт в очень малом обл-ии пр-ва (электрон в атоме).
↓
не F закона движт е.

Сложение сил.

Если ^{на} матер. точку одновр. действ. 2 силы, то она нач. двигаться так, как если бы на нее действ. 1 сила, равная вект. сумме первых двух сил.

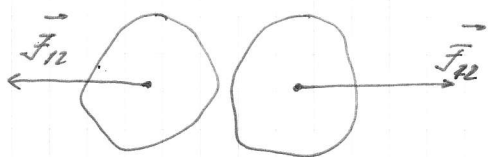


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

В числ сил:
$$\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i$$

Замеч.

Сила взаимодействия 2 тел приложена к разн. телам, напр. вдоль одной прямой и имеет один. природу.



Симметрия

Законы сохр-ния силы и энергии

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad F = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{z}_c = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{z}_i, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i$$

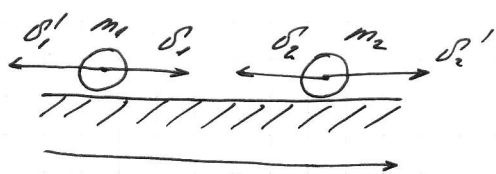
Если сумма всех внешних сил, действующих на тело равна нулю, то импульс сист. сохр.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Если внешние и внутр. силы, абст. консерв., то полная мех. энергия системы в ходе взаимн. ^{не}измен.

$$d(K + \Pi) = dE = 0.$$

Эт



$$v_2' = ?$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_2 v_2' - m_1 v_1'$$

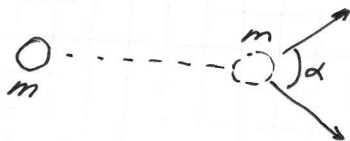
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \\ m_1 (v_1 + v_1') = m_2 (v_2' + v_2) \end{cases}$$

Эт

ω2



$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\alpha \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$m \vec{v}_0 = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2$$

Переход в систему центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{m \vec{v}}{2m} = \frac{\vec{v}}{2}$$

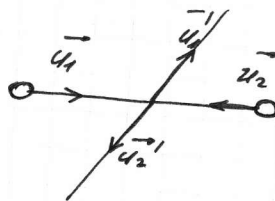
$$\vec{u}_1 = \vec{v} - \vec{v}_c = \frac{\vec{v}}{2}$$

$$u_2 = 0 - \vec{v}_c = -\frac{\vec{v}}{2}$$

Переходим в инерц. с.о.

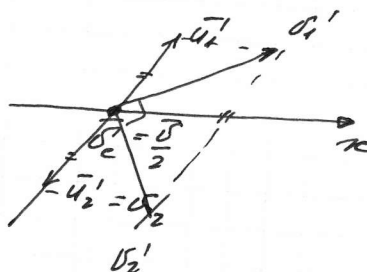
$$\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{v}_c' = \frac{\vec{v}}{2}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2' + \vec{v}_c'$$

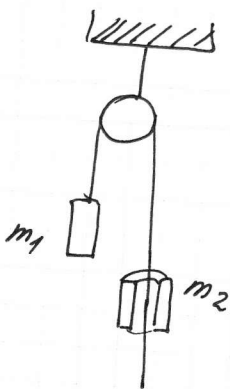


$$u_1' = u_1$$

$$u_2' = u_2$$



Д/з:

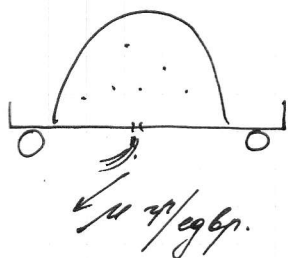


Кольцо движ. с пост. отн.
шнурная ускор. a_2

$$a_1 = ?$$

Фтр. кольца = ?
о шнуре

22.

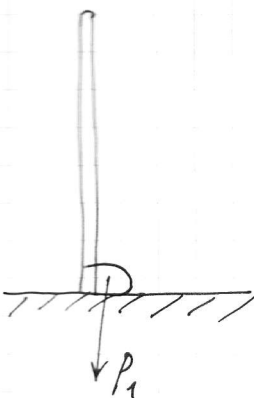


$$z=0 \quad \delta_m = 0$$

$$m_0 =$$

Найти ускор. и $\delta_{\text{миллс}}$

23



$F_{\text{давл}} = ?$ при пад., возразив се груз вес
части каната уже лет на столе.

Импульс

Импульс матер. точки - произведение массы точки на ее скорость.

Обозн $\vec{p} = m\vec{v}$ $[p] = 1 \text{ кг м/с}$

Используя это понятие, можно сформулировать второй закон Ньютона так:

„Скорость измен-ия импульса точки равна действующей на нее силе“.

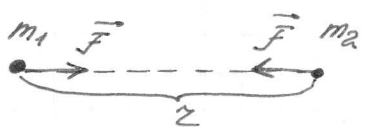
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \quad \vec{\dot{p}} = \vec{F}$$

§6 Сила в механике

Гравитационная сила

Закон всемирного тяготения

Любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, пропорц. их массам и обратно пропорц. квадрату расст. между ними.

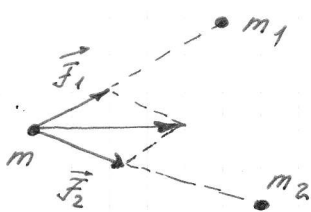

$$\vec{F} \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G - гравитационная постоянная

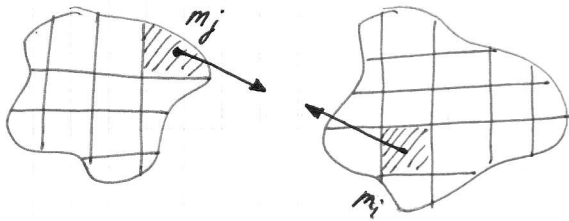
$$G = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н м}^2}{\text{кг}^2}$$

Принцип суперпозиции

Каждая пара частиц взаимодействует независимо, то есть так, если бы других частиц не было.



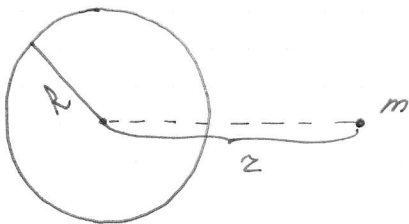
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i$$



$$\vec{F}_i = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

$$\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$$

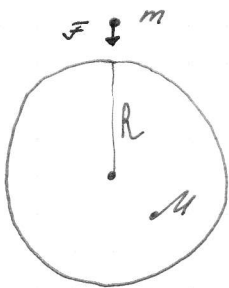
Притяжение точки к однородн. шару



$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

Расчет показывает, что шар притяг. точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Взвешивание Земли



$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$$

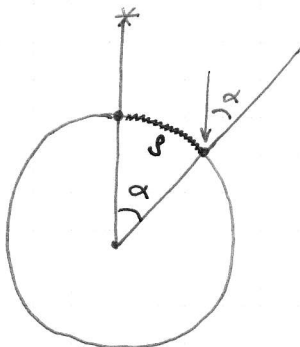
$$M = \frac{g R^2}{G}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$G = 6,6 \cdot 10^{-11}$$

$$R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\left. \begin{array}{l} g = 9,8 \text{ м/с}^2 \\ G = 6,6 \cdot 10^{-11} \\ R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} \end{array} \right\} M = 6 \cdot 10^{24}$$



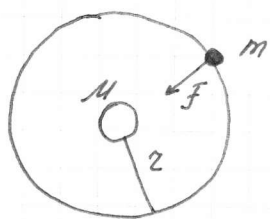
$$\alpha = \frac{s}{R}$$

$$R = \frac{s}{\alpha}$$

Фактот, подтвержд. закон всемирного тягот.

1) Одинаковое ускорение своб. падения у всех тел
вблизи пов-ти Земли.

2) Период обращения спутн.



$$\frac{m v^2}{r} = F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$mg = G \frac{Mm}{r^2}, \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}, \quad v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

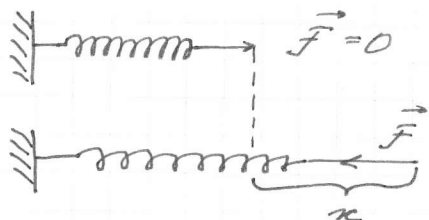
$$m = 384000 \text{ км}$$

$$R = 6400 \text{ км} \rightarrow T = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{R \sqrt{g}} = 30 \text{ суток}$$

Сила упругости.

Сила упруг. - сила, препятств. деформации упругих тел.

Упругими называют тела, которые восст. свою форму после прекращения действия сил (пружина).



Опыт показывает, что величина
сила упругости пропор. деформ.
 $F \sim x$

Закон Гука

$F = kx$, k - коэфф. упруг. пружины

$$[k] = \frac{H}{m}$$

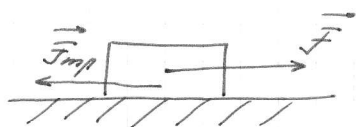


$$F_x = -kx$$

Сила трения

Сила трения - сила, препятств. относительному перемещ. соприкасающ. тел.

Трение покоя



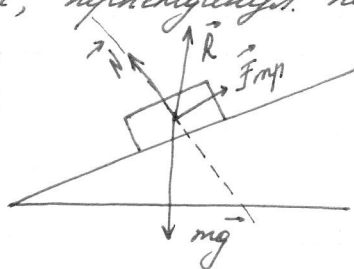
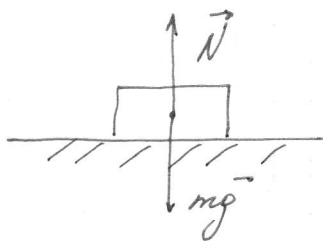
Опыт показывает, что сила трения покоя ограничена некоторой макс. величиной

$$F_{тр} \leq F_{max}$$

Сила нормального давления

Составляющая сила взаимодейств. тел, перпендикул. пов-ти соприкосновения.

Обозн. $\vec{N}$



Сила трения скольжения (есть отн. перемещ.)

Опыт показывает, что сила трения скольж примерно равна максимальной силе трения покоя.

$$F_{тр} \approx F_{max} = \mu N, \quad \mu - \text{коэфф. трения}$$

$$[\mu] = 1$$

Вязкое трение

Трение, препятствующее перемещ. в вязкой среде.

Особенности вязкого трения

- 1) Нет трения покоя.
- 2) Сила вязкого трения зависит от скор.
(Чем меньше скорость, тем меньше $F_{тр.}$)
 $F_{тр.} \sim v$ (если v мала)

Электромагнитный силов

Электрическая сила

Электрический заряд - мера электрического взаимодействия тел.

Электрическое поле - поле, созд. электр. зарядами и проявл. себе действию на электрический заряд.

Напряженность электр. поля - это мера действия поля на заряд.

Вектор $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

Напрет. равна отношению силы, действ. на заряд со стороны поля на величину заряда.

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}}$$

Магнитная сила

$$\vec{F} = q [\vec{v}; \vec{B}] - \text{Сила Лоренца.}$$

$\vec{B}$ - магнитная индукция.

На заряд частицу, движ. в э/м поле действует сила $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$

Релятивистское уравнение движения

Уравнение, опис. движение точки при скорости, соизм. скорости света.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \begin{array}{l} m - \text{масса точки} \\ c - \text{скорость света} \end{array}$$
$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Получим Макс Планк

- 1) Ввод сопр. сист отсчета.
и запись закона Ньют.

§ 7 Инерциальных систем отсчета. Сила инерции.

Инерц. свл. системы, движ. с большими ускорениями отн. поверхности Земли.

Как записать ур-ие движения точки отн. инерц. с.о.?

S - инерциальная сист.

S' - инерц. сист.

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \text{где } \vec{a} - \text{уск, отн. } S$$

$$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a}')$$

Сила инерции - добавочная сила, действующая на мат. точку в инерц. с.о. и опред. формулой $\vec{F}_{ин.} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$,

где m - масса точки

$\vec{a}$ - ускор. точки отн инерц. с.о.

$\vec{a}'$ - ускорение отн инерц. с.о.

$$\S 4: \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}'_1$$

$$\vec{a}_k = \omega [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

$$\vec{F}_{инерц.} = \vec{F}_n + \vec{F}_k, \quad \vec{F}_n = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}' - \text{переносн. сила инерц.}$$

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \text{корриолисова сила инерции}$$

§ 8 Импульс системы частиц

Движение центра масс.

Импульс $\vec{p} = m\vec{v} \quad [p] = 1 \frac{кг \cdot м}{с}$

Импульсом системы частиц называется сумма импульсов отд. частиц системы.

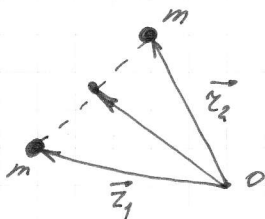
$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Центр масс системы частиц - точка, радиус-вектор

которой выражается формулой $\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$.

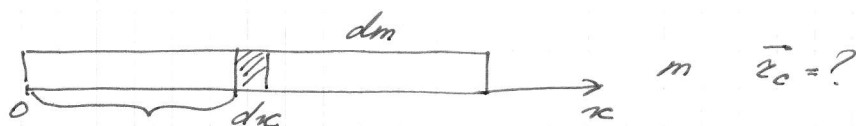
$$m = \sum_i m_i$$

Пример.



$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

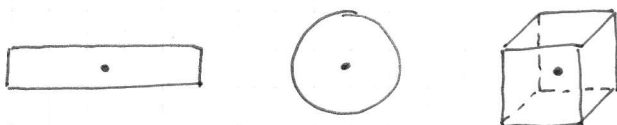
Центр масс стержня



Спросимся где-ли для $\vec{x}_c$ на ось координат, паралл. стержню.

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{m} \frac{m}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l} \Rightarrow dm = \frac{m dx}{l}$$



Скорость и ускорение центра масс

$$\vec{x}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{x}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Отсюда следует где-ли для импульса сист.

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$$

Импульс любой мех. системы равен произв. массы сист. на вектор скор. центра масс.

Закон движения центра масс

Внутр. и внешние силы системы частиц

Внутренними силами назыв-ся силы взаимод. между телами системы

Обозн. $\vec{F}_{ij}$, где i - номер действующей точки
 j - номер т., на кот действует сила



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0, \forall i, j$$

Отсюда следует, что сумма внутренних сил в системе равна 0.

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = 0$$

Внешние силы - силы, действующие на тела сист. со стороны тел, не вход. в систему.

Обозн. $\vec{F}_i$



Закон движения точки системы

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \left(\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = 0$$

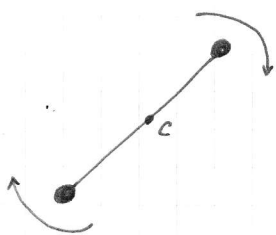
$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{вн}$$

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{m} \vec{F}_{вн}$$

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{вн}$$

- закон движения центра масс

Теорема Центр масс мех. системы движется так, как если бы в этой точке мех. вел. масса системы и к ней были бы прилож. все внешние силы.



§9 Закон сохр-ия импульса

Закон измен импульса сист. частиц

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_c = \vec{F}_{вн}$$

$$\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{вн}} \text{ - закон изм. имп.}$$

Для N тел сист. скорость изм-ия импульса равна сумме внешних сил.

Если сумма внешних сил $= 0$, то импульс тел сист. сохраняется

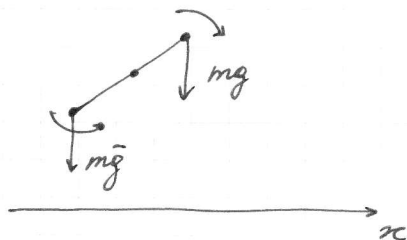
Если $\vec{F}_{вн} = 0$, то $\boxed{\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const.}$ - закон сохр. импульса

Полл сильман ф-ла

Если $\exists$ такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил $= 0$, то в напр. этой оси импульс сист. сохр-ся

Если $F_{вн x} = 0$, то $\boxed{p_x = \sum m_i v_{ix} = const.}$

Пример:



$$p_x = m v_{1x} + m v_{2x} = const$$

$$v_{1x} + v_{2x} = const$$

Реактивное движение

Движение в результате выброса реактивной струи.

$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} dm \Leftrightarrow$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}, \text{ где } \vec{c} - \text{скорость выброса реактивной струи отн. ракеты.}$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v} + m d\vec{v} - \vec{v} dm - dm d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{c} dm$$

$$m d\vec{v} - \underbrace{dm d\vec{v}}_0 + \vec{c} dm = 0$$

$$m d\vec{v} + \vec{c} dm = 0 \quad | : dt$$

$$m\vec{a} = -\vec{c} \frac{dm}{dt} = -\mu \vec{c}, \quad \mu = \frac{dm}{dt} - \text{скорость расхода массы}$$

Реактивная сила:

$$\vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

Пример ракеты Зенит

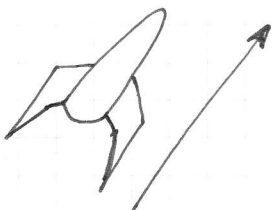
$$c = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$F_p = \mu c = 3 \cdot 10^7 \text{ Н (!)}$$

$$\mu = 10^4 \text{ кг/с}$$

3000 тонн

Стартовая масса ракеты



$$m\vec{a} = \vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

$$ma_x = m \frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

$$(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$\frac{\mu dt}{m_0 - \mu t} = \frac{dv}{c} \quad \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t} = \int_0^t \frac{dv}{c}$$

$$-\ln(m_0 - \mu t) = \frac{\sigma}{c} \quad \left| \begin{array}{l} t=t \\ t=0 \end{array} \right.$$

$$-\ln \frac{m}{m_0} = \frac{\sigma}{c}$$

$$\ln \frac{m_0}{m} = \frac{\sigma}{c}$$

$$m_0 = m e^{\sigma/c}$$

, где m_0 - начальная масса
 m - масса на орбите
 σ - скорость на орбите
 c - скорость света

Пример ракета "Энергия"

$$m = 100 \text{ тонн}$$

$$\sigma = 8 \text{ км/с} - \text{I космос}$$

$$c = 3 \text{ км/с} \Rightarrow m_0 = 2000 \text{ тонн}$$

Закон сохр. импульса в теории относительности

Если сумма вв. сил $= 0$, то релятивистский импульс системы сохр.-ся.

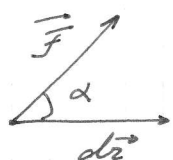
Если $F_{\text{вн}} = 0$, то
$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}, \quad c - \text{скорость света}$$

↑
релятивистский импульс

§6 Работа и потенциальная энергия.

Элементарная работа - скалярное произведение силы на в.м. перемещение точки прилож. силы.

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad [J.м = Dm]$$



$$dA = F dr \cos \alpha.$$

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работа - сумма элементарных работ

$$A = \int dA = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Потенциальная сила - если работа силы, действующей на мат. точку равна 0 при перемещении точки по $\forall$ замкнутой контуре, то сила называется потенциальной.

$$\oint dA = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Примеры пот. сил:

$\vec{F}_{тяж}$, $\vec{F}_{упр}$, $\vec{F}_{кул}$.

Примеры непот. сил:

$\vec{F}_{тр}$, магнитная сила

Элементарная потенциальная энергия - элемент. работа пот. сил, взятая со знаком минус.

$$d\Pi = -dA_p.$$

Потенциальной энергией называется сумма эл. потен. энергий

Обозн: $\Pi = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\Pi$ [Дж]

$$\Pi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$$

$$\Pi(\vec{r}_0) = 0.$$

Свойства потенци. энергии

1) Если известна скал. ф-ия $\Pi(\vec{r})$, то можно построить векторную ф-ию $\vec{F}(\vec{r})$.

Допустим, что Π задана в декартовых коорд.

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$d\Pi = -d\Pi_n = -F d\vec{r} = -(\vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz)$$

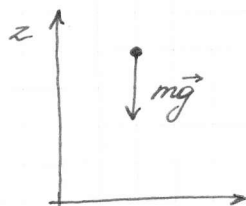
$$\vec{F}_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \vec{F}_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \vec{F}_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\vec{F} = \vec{i} \vec{F}_x + \vec{j} \vec{F}_y + \vec{k} \vec{F}_z = - \underbrace{\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)}_{\text{градиент функции } \Pi.}$$

$$\vec{\text{grad}} \Pi = \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\text{grad}} \Pi}$$

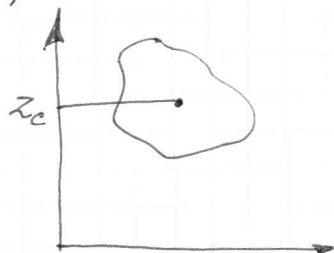
Пример 1.1 Однородное поле тяжести



$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = -m\vec{g} d\vec{r} = mg dz$$

$$\Pi = \int_{z_0}^z d\Pi = mg \int_{z_0}^z dz = mg(z - z_0)$$

Пример 1.2 Потенц. энергия тела в поле тяжести



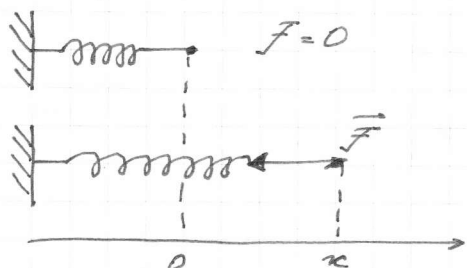
$$\Pi_i = m_i g z_i$$

$$\Pi = g \sum_i m_i z_i = mg z_c$$

Назовем потенц. энергией системы часть суммы потенц. энергий отдельных частей системы.

$$P = \sum_i P_i$$

Пример 2 Потенц. энергия пружины



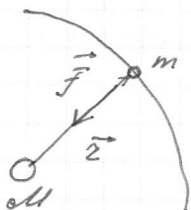
$$F_x = -kx$$

$$d\Pi = -dA = -F dx = -F_x dx = kx dx$$

$$\Pi = \int_0^x d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

Пример 3 Потенц. энергия точки в центр. силовом поле

Центр. силовое поле - поле сил, направленных всегда в сторону одной и той же точки, назыв. силовым центром.



$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} F$$

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} F d\vec{r}$$

$$d\Pi = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$

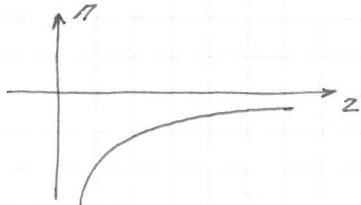
$$\vec{r} d\vec{r} = x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

$$\boxed{\vec{r} d\vec{r} = r dr}$$

$$d\Pi = F dr$$

$$\Pi = \int_{r_0}^r F dr = G M m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = -G M m \int_{r_0}^r d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Pi(r) = G M m \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) = \left/ r_0 = \infty \right/ = -\frac{G M m}{r}$$



§11 Кинетическая энергия

Кинетической энергией наз-ют величина, определенная ф-лой

$$K = \frac{m\vec{v}^2}{2}, \quad [K] = \text{кг} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}$$

Закон изменения кинетической энергии

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{Умножим скалярно на } d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} d\vec{r} = dA = m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m\vec{v} d\vec{v} = m\vec{v} d\vec{v} = d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = dK.$$

$$\boxed{dK = dA}$$

Приращ. кинет. энергии матер. точки равно работе действующ. на нее сил. — Закон изм. кин. энергии.

Кинетическая энергия системы частиц — сумма кин. энергий отдельных частиц системы.

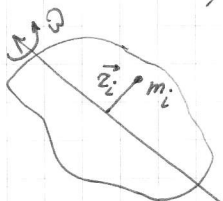
$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2$$

Поступательное движение

$$\vec{v}_i = \vec{v}$$

$$K = \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

Вращение вокруг неподв. оси



$$\vec{v}_i = \omega r_{i\perp}$$

$$K = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

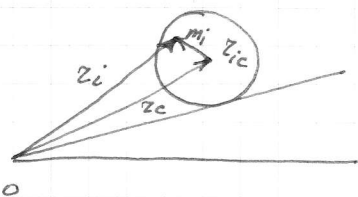
которая хар-ка тела по отнош. к оси вращения (момент инерции тела отн. оси).

$$Y = \sum_i m_i z_{i1}^2$$

$$K = \frac{Y\omega^2}{2}$$

Плоское движение твердого тела

Это движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой плоскости.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{v}_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) = \frac{m\vec{v}_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{ic}^2 + \vec{v}_c \sum_i m_i \vec{v}_{ic}$$

Покажем, что посл. сумма = 0.

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{ic}^2 = \frac{Y\omega^2}{2} \quad (Y = Y_c)$$

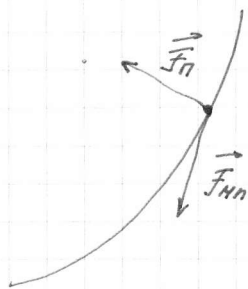
$$K = \frac{m\vec{v}_c^2}{2} + \frac{Y\omega^2}{2} \quad - \text{теорема Кельвина.}$$

§12 Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия системы - сумма кинетической и потенц. энергии сист.

$$E = K + \Pi. \quad [Дж]$$

Закон изм-ия полной энергии



$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_{тп}; \quad dK = dA; \quad dA = \vec{F} d\vec{z} = dA_n + dA_{тп}$$

$$dA_n = \vec{F}_n d\vec{z}; \quad dA_{тп} = \vec{F}_{тп} d\vec{z}$$

$$dK = \underbrace{dA_n + dA_{тп}}_{-d\Pi}$$

$$dK + d\Pi = dA_{тп}$$

$$d(K + \Pi) = dA_{тп}$$

$dE = dA_{тп}$ - Приращ. полной энергии равно работе $F_{тп}$.

Если $A_{тп} = 0$, то полная мех. энергия системы сохр-ся.

Закон сохранения энергии

Если $A_{тп} = 0$, то $E = K + \Pi = \text{const.}$

Закон сохр-ия энергии в теории отн-ти

Если сумма внешних сил $= 0$, то релятивистская энергия системы сохр-ся.

$$\text{Если } \vec{F}_{вн} = 0, \text{ то } E = \sum \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const.}$$

Этот закон эквив. следующему ЗЧЧ и приму. отн-ти.

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const.} \quad \text{Эти два закона всегда действуют вместе.}$$

$$p = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Эксперимент показал, что энергия покоя $E_0 = mc^2$

Пример: Неупругий удар

Удар, в результате которого тела слипаются



$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{M'\vec{V}'}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}}$$

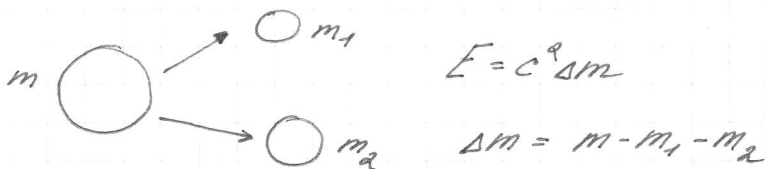
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{M'c^2}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}}$$

$$V' = 0, \quad M' = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 2m \quad (!)$$

П.о. теории стл-ти предск. возм. взаимн. превр. массы и энергии.

Факты, подтв. теорию стл-ти

1) Дефект массы урана



2) Световое давление

$$\begin{cases} E\vec{v} = \vec{p}c^2 \\ E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \end{cases} \quad m=0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow v=c$$

Ротач - лучи света

Сила свет. давл.

$$F = \dot{p} = \frac{\dot{P}}{c} = \boxed{\frac{P}{c} = F}, \text{ где } P - \text{мощн. света}$$

$$P = 10^3 \text{ Вт}, \quad F = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

§13 Момент импульса частицы
и системы частиц.
Момент силы

Момент импульса частицы - векторное произведение радиус-вектора частицы на ее импульс.

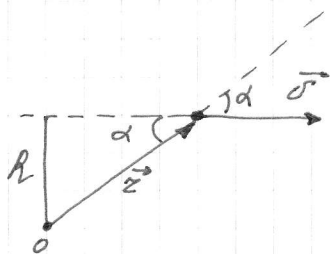
$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad \left[\text{м кг } \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$$

Момент импульса системы частиц - сумма моментов импульса отдельных частиц системы

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Момент силы - векторное произв. радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

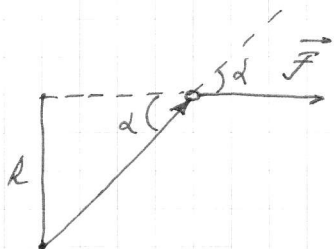
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad \left[\text{Н} \cdot \text{м} \right]$$



$$\vec{N} \oplus$$

$$N = r m v \sin \alpha = m v R$$

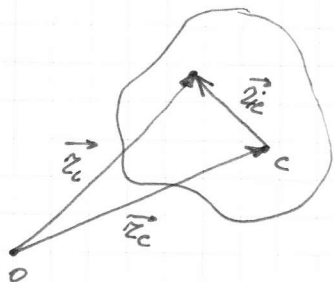
$$r \sin \alpha = R$$



$$\vec{M} \oplus$$

$$M = r F \sin \alpha = R F$$

Вспомогательный момент импульса сист. тел.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] =$$

$$= \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}] =$$

$$= [\vec{r}_c; m \vec{v}_c] + [\vec{r}_c, \sum_i m_i \vec{v}_{ic}] + [\sum_i m_i \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c] + \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

$$\vec{M} = \vec{M}_c + \vec{M}_{ic}$$

$$\vec{M}_c = [\vec{r}_c; m \vec{v}_c]$$

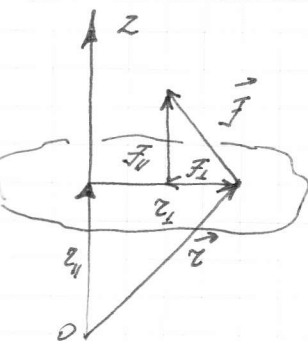
$$\vec{M}_{ic} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, m_i \vec{v}_{ic}]$$

момент импульса центра
относит центра

Момент относительно оси

Моментом отн. оси наз-ся проекция вектора момента на эту ось

Момент отн. осн.



$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}, \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}] =$$

$$= [\vec{r}_{||}; \vec{v}_{||}] + [\vec{r}_{||}; \vec{v}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}; \vec{v}_{||}] + [\vec{r}_{\perp}; \vec{v}_{\perp}]$$

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]$$

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1; \vec{F}_1]$$

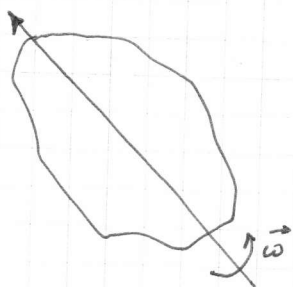
т.о. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ ~~и~~

R_H

Момент импульса отн оси

$$\vec{N}_H = \sum_i [\vec{r}_{i1}; m_i \vec{v}_{i1}]$$

Вращение тела вокруг неподв. оси.



$$N_H = ?$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i1} = [\vec{\omega}; \vec{r}_i]$$

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}; \vec{r}_i]$$

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_{i1}; m_i \vec{v}_{i1}] = \sum_i m_i [\vec{r}_{i1}; [\vec{\omega}; \vec{r}_{i1}]] =$$

$$= \sum_i m_i \{ \vec{\omega} \vec{r}_{i1}^2 - \underbrace{\vec{r}_{i1} (\vec{r}_{i1} \cdot \vec{\omega})}_{=0} \} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i1}^2$$

$$\vec{N}_H = \mathcal{I} \vec{\omega}$$

$$\mathcal{I} = \sum_i m_i r_{i1}^2$$

Полное глукание твердого тела

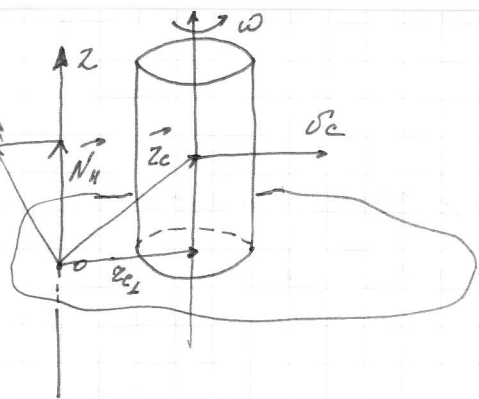
$$\vec{N} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

$$\vec{N}_H = \vec{N}_{cH} + \vec{N}_{ocH}$$

$$\vec{N}_H = [\vec{r}_{c1}; m \vec{v}_{c1}] + \mathcal{I} \vec{\omega}$$

$$\vec{N}_{cH} = [\vec{r}_{c1}; m \vec{v}_{c1}]$$

$$\vec{N}_{ocH} = \mathcal{I} \vec{\omega} \quad (\mathcal{I} = \mathcal{I}_c)$$



§4 Теорема моментов Закон сохранения момента импульса

Найдем закон изменения момента импульса частицы.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$\dot{\vec{N}} = \underbrace{[\dot{\vec{r}}; m\vec{v}]}_{=0} + [\vec{r}, \underbrace{m\dot{\vec{v}}}_{=\vec{F}}] = [\vec{r}; \vec{F}] = \vec{M}$$

$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}}$ - скорость изменения момента импульса частицы
равна моменту действующих на нее сил.

Рассмотрим систему частиц

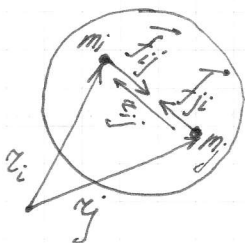
$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m\vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i \underbrace{[\dot{\vec{r}}_i, m\vec{v}_i]}_{=0} + \sum_i [\vec{r}_i, m\dot{\vec{v}}_i]$$

$$m\dot{\vec{v}}_i = \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{внеш.}} + \sum_j \underbrace{f_{ij}}_{\text{внутр.}}, \quad \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \quad (\text{III.3.Ж})$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i; \vec{F}_i + \sum_j f_{ij}] = \vec{M}_{\text{внеш}} + \vec{M}_{\text{внутр.}}$$

Покажем, что суммарной $\vec{M}_{\text{внутр}} = 0$



$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] = 0$$

$$\vec{M}_{\text{внутр}} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij} = 0$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{\text{вн}} \quad \vec{M}_{\text{вн}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

Теор. моментов для сист. - скорость изменения момента импульса системы равна сумме моментов вн. сил

Отсюда следует закон сохр-ия м.ч

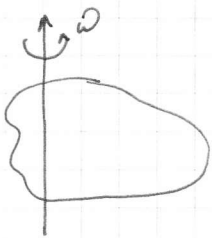
Если сумма моментов внешних сил $= 0$, то момент импульса системы сохр-ся

$$\text{Если } \vec{M}_{\text{вн}} = 0, \text{ то } \vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}$$

Теор. о главном ф-ке

Если $\exists$ такая ось, отн. которой сумма моментов вн. сил $= 0$, то отн. этой оси момент импульса системы сохр-ся.

$$\text{Если } M_{\text{вн}}^{(z)} = 0, \text{ то } N_z = \text{const}$$



$$\vec{N} = I \vec{\omega}$$

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

§15 Материальная точка в
центральной
поле

Закон Кеплера

I Закон

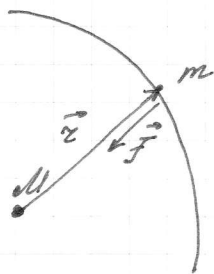
Планета Солнечной системы движется по эллипсу, в одном из фокусов которого нах. Солнце.

II Закон

За равное промежутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади.

III Закон

Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их эллипт. орбит.



$$\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{M}} = [\vec{r}; \vec{F}] = 0$$

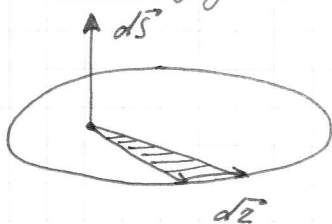
$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

При движении в центр. поле момент или, наст. сокр-ая

Выводы

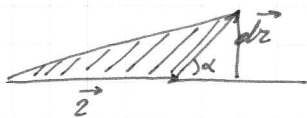
- 1) Такое движ. свл. плоским.
- 2) При таком движ. сокр-ая секторная скорость

Секторная площадь



$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}]$$

$$dS = \frac{1}{2} r dr \sin \alpha$$

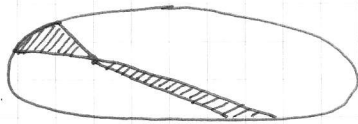


$$h = dr \sin \alpha$$

Секторная скорость

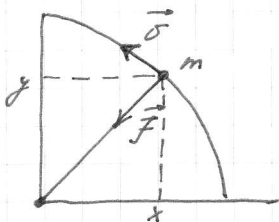
$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{[\vec{r}; d\vec{r}]}{2dt} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}] = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] = \frac{1}{2m} \vec{N}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\hbar m} \vec{N} = \text{const}$$



Вопрос 1. Задача Кеннеди

Условием ЗСММ и ЗСД.



$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{\sigma}] = \text{const}$$

$$E = K + \Pi = \text{const}$$

$$K = \frac{m\sigma^2}{2}, \quad \Pi = -G \frac{Mm}{z}$$

$$A \equiv G M m \Rightarrow \Pi = -\frac{A}{z}$$

$$\frac{m\sigma^2}{2} - \frac{A}{z} = E = \text{const}$$

$$\sigma^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$N = m [\vec{r}, \vec{\sigma}] = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m \vec{k} (x\dot{y} - \dot{x}y) \equiv$$

$$\equiv \vec{k} N, \text{ где } N = m(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{const}$$

Введем полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = r \sin \varphi, \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) =$$

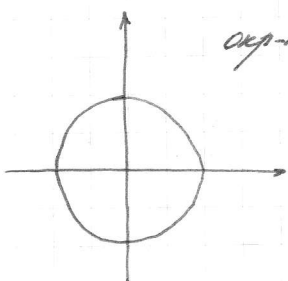
$$= z^2 \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + z^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\mathcal{A}}{z} = E \\ m z^2 \dot{\varphi} = N \end{cases}$$

Траектории $z = z(\varphi)$

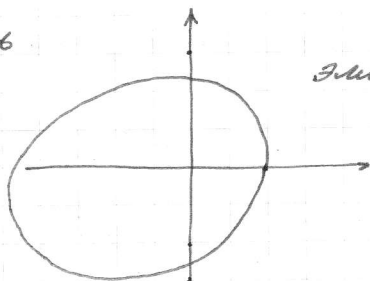
$$z(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$\varepsilon = 0$$



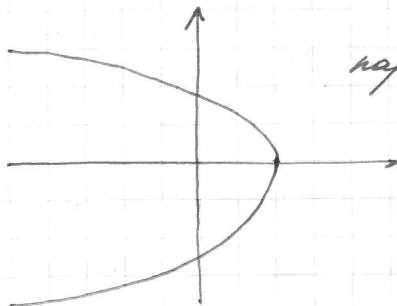
окр-ть

$$0 < \varepsilon < 1$$



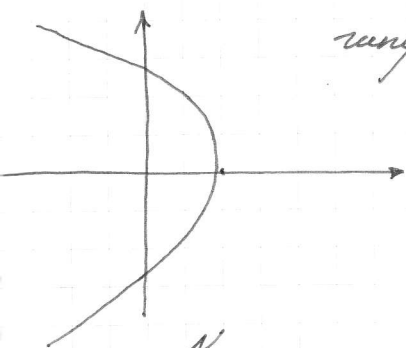
эллипс

$$\varepsilon = 1$$



парабола

$$\varepsilon > 1$$



гипербола

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{m z^2} \text{ - подставим в (1) ур-ие}$$

$$\dot{z}^2 + \frac{N^2}{m^2 z^2} - \frac{2\mathcal{A}}{m z} = \frac{2E}{m}$$

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\mathcal{A}}{m z} - \frac{N^2}{m^2 z^2}} = \frac{dz}{dt}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{m z^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Поделим I ур-ие на II

$$\frac{dx}{d\varphi} = \pm \frac{m\epsilon^2}{N} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{m\epsilon} - \frac{N^2}{m^2\epsilon^2}}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pm \epsilon^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{\epsilon N^2} - \frac{1}{\epsilon^2}}$$

Умножим, разделив на ϵ^2

$$\frac{dx}{\epsilon^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{\epsilon N^2} - \frac{1}{\epsilon^2}}} = \pm d\varphi$$

Введем переменную $S = \frac{1}{\epsilon}$; $dS = -\frac{d\epsilon}{\epsilon^2}$

$$\frac{dS}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} S - S^2}} = \pm d\varphi$$

Возвращаем в глав. размер. об.

$$\frac{2mE}{N^2} - \left(S^2 - 2S \frac{mA}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} \right) +$$

$$+ \frac{m^2 A^2}{N^4} = \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} - \left(S - \frac{mA}{N^2} \right)^2$$

~~или~~

$$\begin{cases} \kappa = S - \frac{mA}{N^2} \Rightarrow dS = d\kappa \\ \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} = a^2 \end{cases}$$

$$\frac{d\kappa}{\sqrt{a^2 - \kappa^2}} = \pm d\varphi$$

$$d\left(\arcsin \frac{\kappa}{a}\right) = \pm d\varphi$$

$$\arcsin \frac{\kappa}{a} = \pm \varphi + C$$

Возьмем $C = \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin \frac{\kappa}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\frac{\kappa}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\kappa = a \cos \varphi = \frac{1}{\epsilon} - \frac{mA}{N^2} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} = \frac{mA}{N^2} + a \cos \varphi$$

$$\epsilon = \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a \cos \varphi} = \frac{N^2 / mA}{1 + a \frac{N^2}{mA} \cos \varphi}$$

$$\rho = N^2 / mA$$

$$C = \frac{N^2}{mA} \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{mA}{N^4}}$$

фокальный нар-тр.

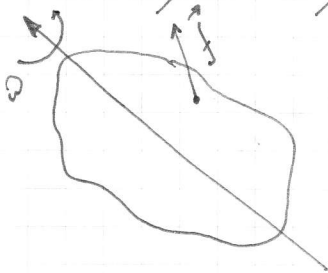
$$= \sqrt{1 + \frac{2N^2 E}{m \delta^2}} - \text{эксцентриситет}$$

$E=0 \Rightarrow$ движ. по пар, $E<0$ - эллипс, $E>0$ - гипербола

§16 Плоское движение каждого тела

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{вн.}$$

Рассмотрим вращение тела отн неподв. оси.



$$\dot{\vec{N}} = \vec{M} \quad \text{Возьмем напр. пар. оси врт.}$$

$$\dot{N}_{||} = M_{||}$$

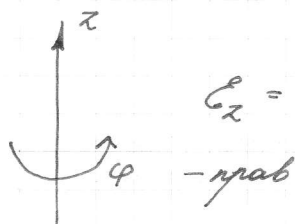
$$\vec{N}_{||} = J\vec{\omega} \Rightarrow \dot{\vec{N}}_{||} = J\dot{\vec{\omega}} = J\vec{\epsilon}$$

↑
угловое ускорение

$$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad [c^{-2}]$$

$$J\vec{\epsilon} = \vec{M}_{||}$$

$$J\epsilon_z = M_z$$



$$\epsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

- прав

Пример (колеб. грузик. маятника)

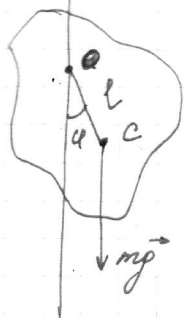
Груз. маятник - тело произв. формы, имеющ. произв. неподв. верт. ось вращ.



$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = [\sum m_i \vec{r}_i, \vec{g}] = \\ &= [m \vec{r}_c, \vec{g}] \end{aligned}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_c, m\vec{g}]$$

Этот момент таков, как если бы вся масса тела находилась в ее центре масс



$z \odot$

$$\mathcal{L}_z = M_z$$

$$\mathcal{L}_z = \dot{\varphi}$$

$$\vec{M} \oplus$$

$$M_z = -M = -mgl \sin \varphi$$

$$\gamma \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{\gamma} \sin \varphi = 0}$$

Сводка формул по плоск. движ.

$$1) m \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{вн}}$$

$$2) \mathcal{L}_z = M_z \quad (\text{применимо для } \forall \text{ моментов или движ. осей, прох. через центр масс тела})$$

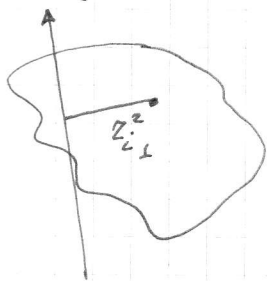
$$3) \vec{p} = m \vec{v}_c$$

$$4) \vec{N}_H = [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + \gamma \vec{\omega}$$

$$5) K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{\gamma \omega^2}{2}$$

§17 Момент инерции
твёрдого тела

$$\gamma = \sum_i m r_{i\perp}^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

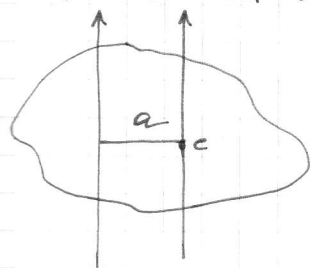


Теорема (Параллельно-Переноса)

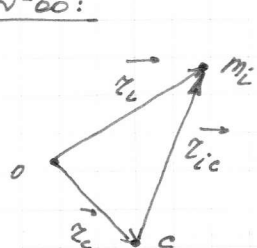
Момент инерции тела отн. паралл. оси равен моменту инерции отн. оси, прох. через центр масс тела, паралл. данной +

полная масса тела, умн. на квадрат расст. между осями.

$$\gamma = \gamma_c + m a^2$$



До-во:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\vec{r}_{iL} = \vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}$$

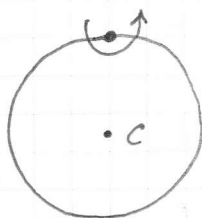
$$J = \sum_i m_i r_{iL}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_{iL}, \vec{r}_{iL})$$

$$J = \sum_i m_i (\vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}, \vec{r}_{cL} + \vec{r}_{icL}) = m r_{cL}^2 + J_c + \underbrace{2(\vec{r}_{cL}, \sum m_i \vec{r}_{icL})}_{=0}$$

$$J = J_c + m a^2$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

Пример (диск)

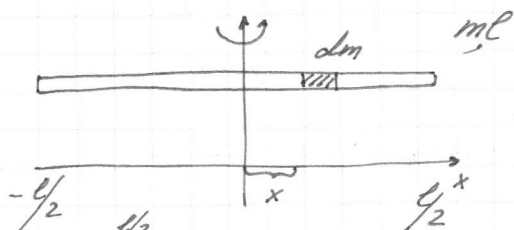


$$J = J_c + m R^2$$

$$J_c = m R^2$$

$$J = 2 m R^2$$

Пример (случаем непрерывной массы)



$$J = ?$$

$$dJ = dm x^2$$

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx$$

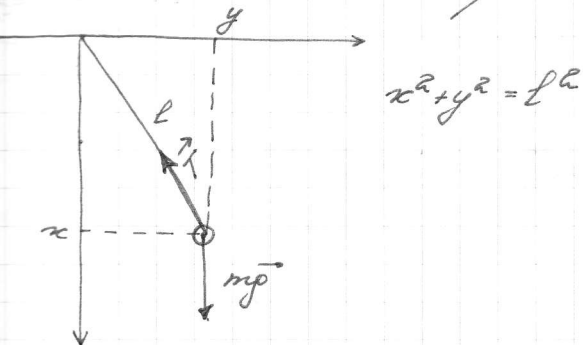
$$J = \int_{-l/2}^{l/2} dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m l^3}{l 12} = \frac{m l^2}{12}$$

§ 18

Системы со связями. Степени свободы. Обобщенные координаты

Связи - не зависят от ур-ий движ-ия оор-ий на коорд., скорости и ускор-ий точек механич. системы.

Математически они выраж-ся ур-иями связи.



В таких системах выдел. 2 типа сил: заданные силы и силы реакции.

Заданные силы наз-ся известные пост-ые силы или известные ф-ии коорд. частиц.

Обозн: $(\vec{F})$

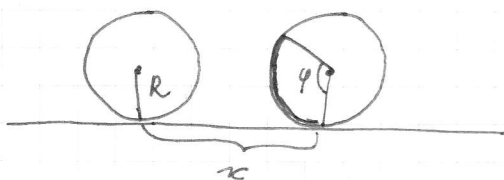
Силы реакции - силы, с которыми тела, осущ. связи, действуют на тела системы.

Обозн: $(\vec{R})$

Классификация связей

- Голономные связи - связи которые свод-ся к оор-иям только на координатах тел

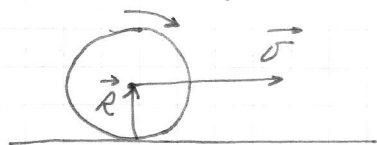
(матем. маятник, тело, движ. без траск.)



$$\kappa = R\varphi \quad (\text{Цилиндр})$$

• Гомологичные связи

Катиме шар по плоскости



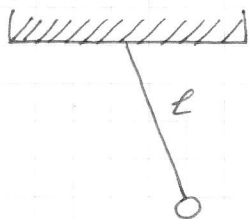
$$\vec{\omega} \oplus$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

• Стационарные связи - связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде.

• Нестационарные явл-ся связи, уравнения кот. содержат время в явном виде

Пример



$$l = l(t)$$

$$x^2 + y^2 = l^2(t)$$

Число степеней свободы - число независимых координат, количеством определяющих положение системы в пр-ве

Обозн: S

Если система состоит из мат. точек, то $S = 3N - k$, где N - число точек, k - число связей

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} N=1 \\ k=0 \end{array} \right\} \Rightarrow S=3$$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} N=2 \\ k=0 \end{array} \right\} \Rightarrow S=6$$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} N=2 \\ k=1 \end{array} \right\} \Rightarrow S=5$$



$$\left. \begin{matrix} N=3 \\ k=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S=6$$

Для $\rightarrow : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$

Твердое тело $S=6$

Обобщенные координаты - S координат, полностью описыв. положение системы в пр-ве

Обозн: $q_1, q_2, \dots, q_S$
 $\{q\}$

В соотв-ии с этими обр-ыми коорд. и радиус-вектор всех точек системы должны быть однознач-ыми функц. набора обобщ. коорд.

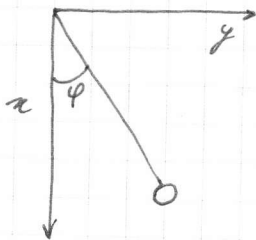
$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, q_2, \dots, q_S, t)$ Для гомоген. сист. эту зав-ть можно всегда найти

Обобщенные скорости - произв. обобщ. коорд. по времени

Обозн: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S, \{\dot{q}\}$

Св-ва обобщ. коорд.

Эти коорд-ты образуют в монот-ва ур-ия связи.



$$S=1 \quad q_1 = \varphi$$

$$x = l \cos \varphi$$

$$y = l \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Число степеней свободы зависит от типа гипотезы

§ 19 Виртуальное перемещение

Виртуальная работа. Идеальные связи

Виртуальное перемещение - в.м. воображ. перемещ. точки, допускаемое связями в данной фикс. момент времени.

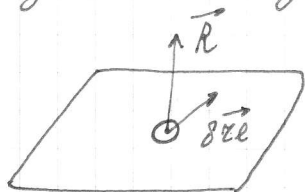
$\delta \vec{r}_e$ - вектор виртуального перемещения

Чтобы найти этот вектор, возьмем дифференциал от вектора $\vec{r}_e$ при фикс. t .

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j \quad e = \overline{1, N}, \quad N - \text{число точек сист.}, \quad S - \text{число степ. своб.}$$

Примеры идеальных связей

- Идеально гладкая пов-ть



$$\delta \mathcal{A} = (\vec{R}_e; \delta \vec{r}_e) = 0$$

Виртуальная работа - работа силы по вирт. перемещ.

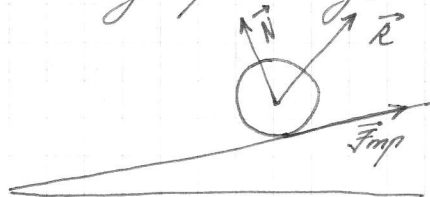
$$\delta \mathcal{A}_e = \vec{F}_e \delta \vec{r}_e$$

Идеальная связь - связь, для которой вирт. работа силы реакции = 0.

$$\delta \mathcal{A}_R = \sum_{e=1}^N (\vec{R}_e; \delta \vec{r}_e) = 0$$

Пример 2

Частица без проскальз.

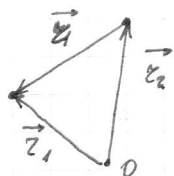
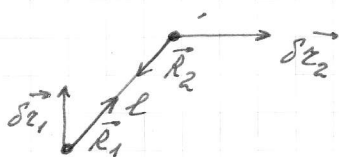


$$\delta \vec{r} = 0, \text{ т.к. нет проскальз.}$$

$$(\vec{R}, \delta \vec{r}) = 0$$

Пример 3

Местный невесомый стержень



$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$$

$$\delta A_2 = (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1) + (\vec{R}_2, \delta \vec{r}_2) =$$

$$= (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1) - (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_2) =$$

$$= (\vec{R}_1, \delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = (\vec{R}_1, \delta \vec{r}) \ominus, \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R}_1 = \alpha \vec{r}$$

$$\ominus (\alpha \vec{r}, \delta \vec{r}) = \alpha (\kappa \delta \kappa + y \delta y + z \delta z) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \delta (\underbrace{\kappa^2 + y^2 + z^2}_{r^2}) = 0$$

$$r^2 = l^2 = \text{const}$$

§ 20 Уравнение Лагранжа.
Обобщенные силы.

Рассм. систему с идеальными голономными связями.

$$S, \quad q_1, \dots, q_s$$

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$$

$$l = \overline{1, N}, \quad N - \text{число точек сист.}$$

$$\delta \vec{r}_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \delta A = \sum_{l=1}^N \vec{R}_l \delta \vec{r}_l = 0$$

Запишем II з. Н. для стр. точки системы

$$m_l \ddot{\vec{r}}_l = \vec{F}_l + \vec{R}_l \quad l = \overline{1, N}$$

Исключим силу реакции. Скалярно умножим на $\delta \vec{r}_l$ и

просуммируем по всем точкам

$$\sum_{l=1}^N (m_l \ddot{\vec{r}}_l - \vec{F}_l) \delta \vec{r}_l = \sum_{l=1}^N (\vec{R}_l \delta \vec{r}_l) = 0 \quad \text{— ур-е Даламбера Лагранжа}$$

Периоды и абсц. координаты.

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

Получим нулевой суммируемый

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = 0$$

$$\text{Обозначим } \sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e; \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}) = X_j$$

$$\sum_{e=1}^N (\vec{F}_e; \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}) = Q_j$$

$$\text{Получим } \sum_{j=1}^s (X_j - Q_j) \delta q_j = 0$$

Из того, что абсц. коор. независимы $\Rightarrow$, что $X_j = Q_j \quad \forall j = \overline{1, s}$

Получим, что X_j может быть выражена через кин. энергию системы.

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}, \quad K - \text{кинет. энергия сист.}$$

$$K = \sum_{e=1}^N \frac{1}{2} m_e \vec{v}_e^2 = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e (\vec{v}_e; \vec{v}_e)$$

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{r}}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t}$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_e(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$K = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{l=1}^N \frac{1}{2} m_l (\vec{v}_l, \vec{v}_l) \right) = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) = \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \dot{\vec{v}}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{l=1}^N m_l \vec{v}_l \frac{\partial \vec{v}_l}{\partial q_j}}_{\frac{\partial K}{\partial q_j}}$$

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j} \quad \text{— ур-ие Лагранжа отн-мо кинетической энергии}$$

$j = \overline{1, S}$

Обобщенная сила — величина, опред ф-лой

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, S}$$

$$[Q_j] = \left[\frac{\partial K}{\partial q_j} \right]$$

Общ.

$$[q] = M \Rightarrow [Q_j] = H$$

$$[q] = \text{рад} \Rightarrow [Q_j] = 2\pi = H \cdot M$$

§ 21 Принцип Лагранжа. Обобщенная механика

Рассмотрим сист. с идеальн. гомогенными связями и потенциальными возр. силами.

$$\vec{F}_e = -\text{grad } \Pi_e, \quad e = \overline{1, n} \quad (\S 10)$$

$$\vec{F}_e = - \left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e} \right)$$

Подставим в формулу обобщ. сил:

$$Q_j = \sum_{e=1}^n \vec{F}_e \frac{\partial x_e}{\partial q_j} = - \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} \frac{\partial y_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e} \frac{\partial z_e}{\partial q_j} \right) = - \sum_{e=1}^n \frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{e=1}^n \Pi_e = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad \text{где}$$

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \Pi_e.$$

$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$

 Подставим это в ур-ие Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial q_j} = 0 \quad \left(\Pi = \Pi(q, t) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$$

Функция Лагранжа

Это разность кинет. и пот. энергии системы, выраженн. через обобщ. координаты, обобщ. скор. и время

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, S}, \quad S - \text{число степеней своб.}$

← формул. Лагр.

Обобщенный импульс

Это частная производная функции Лагранжа по обобщенной скорости.

$$\text{Обобщ. } p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Найдем разм-ты p_j

$$[p_j] = \frac{Дж \cdot с}{[q]}$$

$$[q] = м \Rightarrow Дж \cdot с \text{ (мб)}$$

$$[q] = 1 \Rightarrow [p] = Дж \cdot с \text{ (мбс)}$$

Закон упр-ия обобщенного импульса

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Циклическая коор- обобщ коор, которая не входит в функции

$$\text{Лагранжа } \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \right)$$

Закон сохр-ия обобщ. импульса

Обобщенный импульс, соотв-ий циклич. координате, сохр-ся.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{const.}$$

§2.2 Уравнение Гамильтона. Канонические пер-ые.

Рассм. систему с идеальн. гомогенными силами и
потенц. энерг. силами.

Будем описыв. сост. системы набором обобщ. коорд и
обобщ. импульсов. Этот набор наз-ся каноническими
пер-ыми.

Введем ур-ия движения сист. для этого набора пер-ых

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial p_j}$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

$$dL = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^s \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Введем ф-ию $H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L$

$$dH = \sum_{j=1}^s (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j) - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^s \cancel{p_j d\dot{q}_j} + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Возьмем H чрез q_j, p_j, t

$$H = H(q_j, p_j, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Тригранн координат при данном движении

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

↑
Ур-ие Гамильтона

Функция Гамильтона (Гамильтониан)

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t)$$

Зависимость Гамильтониана от времени

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^s (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Т.е. Гамильт. может зависеть от врем. только явно.

Консервативная система - система, Гамильтон. которой не зависит от времени.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad H = H(q, p).$$

Покажем, что H имеет смысл в виде полной мех. энергии.

$$H = K + \Pi \quad (?)$$

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L, \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \sum_{l=1}^n \frac{m_l \vec{v}_l^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n m_l (\vec{v}_l \vec{v}_l)$$

$$\vec{v}_l = \frac{d\vec{r}_l}{dt}, \quad \vec{r}_l = \{ r_l(q_1, \dots, q_s) \}$$

$$\vec{r}_l = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m m_l \sum_{\alpha=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^S \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \underbrace{\sum_{l=1}^m m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_\beta}}_{K_{\alpha\beta}(q)}$$

$$K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S K_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S K_{\alpha\beta}(q) \cdot$$

$$\cdot \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^S K_{\alpha\beta}(q) (\dot{q}_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \dot{q}_\beta \delta_{\beta\alpha}), \quad \textcircled{=}$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ - символ Кронекера

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S \dot{q}_\beta K_{j\beta} = \boxed{\sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha j} \dot{q}_\alpha} \quad j=1, S$$

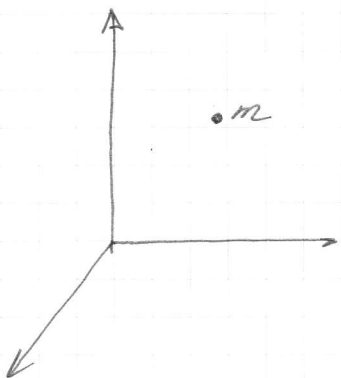
В С помощью канон. системы ур-ий можно выразить обобщ. скорости через обобщ. импульсы: $\dot{q} \mapsto p$

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^S K_{\alpha j} \dot{q}_\alpha - L = \underbrace{\sum_{\alpha, j=1}^S K_{\alpha j} \dot{q}_\alpha \dot{q}_j}_{2K} - L =$$

$$= 2K - K + \Pi = K + \Pi = H$$

Гамильтониан консерв. системы это сумма K и Π энергий системы, выр-ан через набор обобщ. коорд. и обобщ. импульсов системы.

Пример (частица в пот. силовом поле)



$$S=1$$

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$$

$$\Pi = \Pi(x, y, z)$$

$$H = K + \Pi = H(q, p)$$

$$K = \frac{m\dot{S}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial K}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

§ 2.3 Равновесие системы и его устойчивость.

Равновесием наз-ат сост-ие, в котором, система, предостав. самой себе может нах. сколь угодно долго.

Найдем условия равновесия

$$(1) \vec{F}_e + \vec{R}_e = 0 \quad (\text{для } \forall \text{ точки сумма всех сил} = 0)$$

$$l = \overline{r, n}$$

Рассм систему с идеальными связями.

$$\delta A_R = \sum_{l=1}^n (\vec{r}_l \delta \vec{r}_l) = 0$$

$$(2) \sum_{l=1}^n \vec{F}_l \delta \vec{r}_l = 0 \quad (\text{даются скалярно на } \delta \vec{r}_l)$$

Согласно этой др-ле в состоянии равновесия должна быть = 0 виртуальная работа зар. сил. (принцип вирт. перемещ.)

Получили отсюда сист. уравн. путем перехода к обобщ. коорд.

Допустим, что система голономна.

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_l &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow \sum_{l=1}^n \vec{F}_l \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^s \delta q_j \underbrace{\sum_{l=1}^n \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0 \end{aligned}$$

Из независ. обобщ. коорд. $\Rightarrow$, что должно быть в 0 все обобщ. силы, т.е.

$$(3) Q_j = 0 \quad (\text{Мы получ, что в некот. равновесии должно быть в 0 все обобщ. силы})$$

Рассм сист. с потенц. зад-ыми силами.

$$(4) Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, j = \overline{1, s}$$

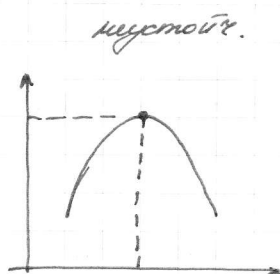
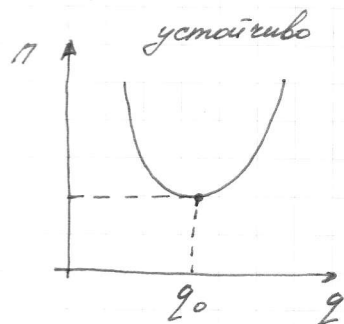
Вост- в сост-ии равновесия Π энергия должна иметь экстремум по всем обобщ. коорд.

Устойчивость равновесия

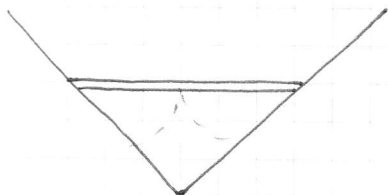
Равновесие устойчиво, если сист., вывед. из этого сост. и

присут. самим себе, находится движ. в стор. пол-ий
равновесия. В противном случае равновесие неустойчиво.

Равновесие устойчиво, если потенци. энергия в точке
равновесия имеет min и неустойчиво, если имеет
max.



Пример. (равновесие стержня)



§2.4 Колебания в сист с 1 степенью свободы

Колебания - повторяющ. движения в окр-ти положения
устойч. равновесия системы.

В системах с 1 степенью свободы колеб. опис. ур-нием
гармонич. колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x - обобщенная коор, которая отсчит от
полож. равновесия сист.

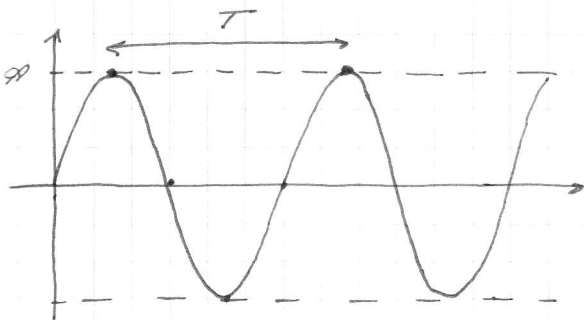
ω - частота колебаний

$$[\omega] = \text{с}^{-1}$$

Общее решение:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \begin{array}{l} t - \text{время} \\ \omega - \text{частота} \\ A - \text{амплитуда} \\ \varphi - \text{начальный фаз} \end{array}$$

$\varphi \equiv (\omega t + \varphi)$ - фаза колебаний



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Амплитуда и начальный фаз

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Чтобы найти амплитуду и фазу, зададим нач. условия.

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -A\omega \sin \varphi \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

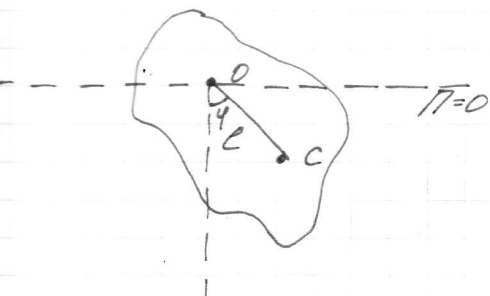
$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega A}$$

Метод опред. частот колебаний

- ① Написать ур-ие движ. сист.
- ② Получ. ур-ие привести к станд. виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Пример (физический маятник)



O - ось вращения
C - центр масс

$S=1$ - степень свободы

$$q = \varphi$$

$$\dot{q} = \dot{\varphi}$$

$$K = \frac{J \omega^2}{2} = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

$$L = K - \Pi = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

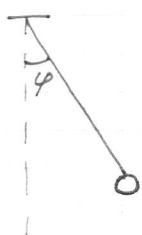
$$J \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

Рассмотрим малые колебания $\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \sim \varphi$

$$J \ddot{\varphi} + mgl \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

Пример (математический маятник)

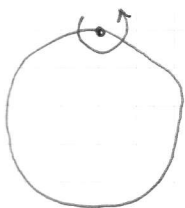


$$J = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} - \text{формула Тейлора}$$

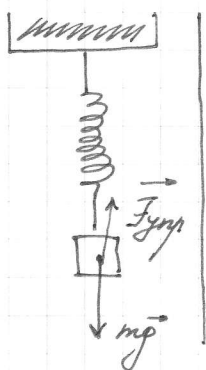
Пример (обруч)



$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{J}} = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

Пример (пружинный маятник)



$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k \underbrace{\left(x - l_0 - \frac{mg}{k}\right)}_y = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} y = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

§2.5 Редукционные эффекты в колебательных системах

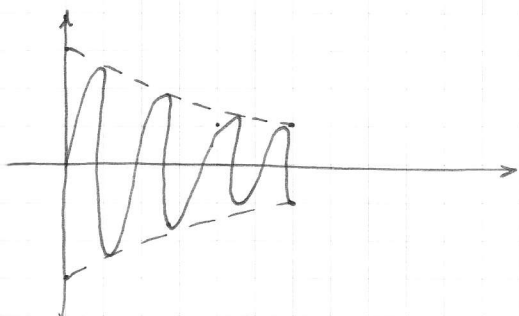
① Гармонические колебания

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

② Затухающие колебания

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

↑
действие
внешнего трения



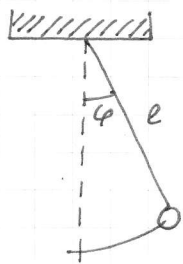
Добротность:

$$Q = \frac{T_{\text{зам}}}{T}$$

③ Нелинейные колебания

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

Математик: $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$



$$E = K + \Pi = \text{const}$$

$$K = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m}{2} (l\dot{\varphi})^2$$

$$\Pi = -mgl \cos \varphi$$

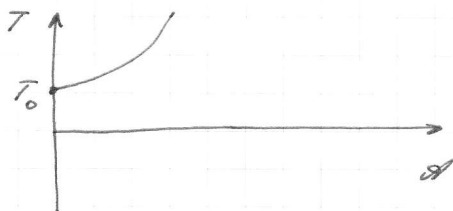
$$\frac{m}{2} (l\dot{\varphi})^2 - mgl \cos \varphi = \text{const} = E$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} \cos \varphi = \frac{2E}{m l^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m l^2} + \frac{2g}{l} \cos \varphi}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b \cos \varphi}} = \pm \int_0^t dt = \pm t \Rightarrow \text{основной эффе́кт:}$$

T начинает зависеть от амплитуды



④ Вынужденные колебания

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

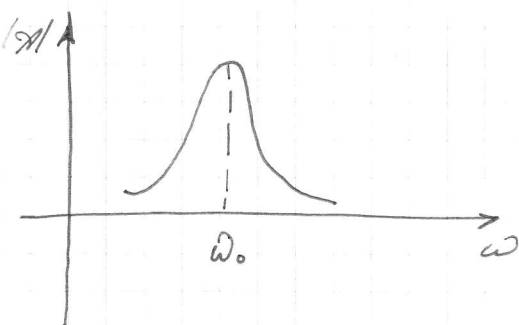
Пусть $f(t) = f_0 \cos \omega t$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \text{комп. сопр.}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{комп. сопр.}$$

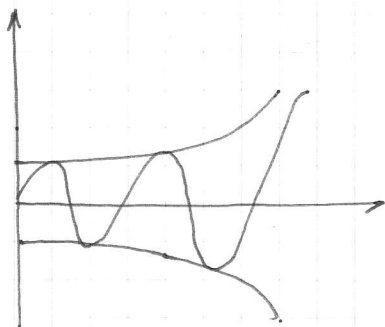
$$(-\omega^2 + \alpha i \omega + \omega_0^2) A = f_0 \Rightarrow A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i \omega}$$



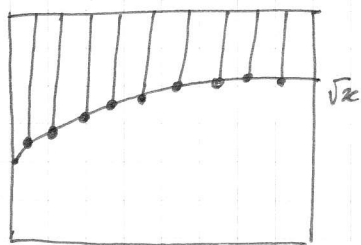
Резонанс - возрастание амплитуды колеб. при совп. частоты изн-ия вн. силы с собств. част. колеб. сист.

⑤ Параметрич. колеб.

$$\ddot{\kappa} + \omega^2(t) \kappa = 0 \quad \omega(t) \text{ - задан ф-ия времени.}$$

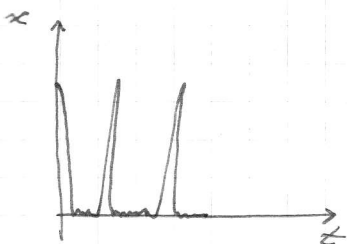


⑥ Ансамбль осцилляторов



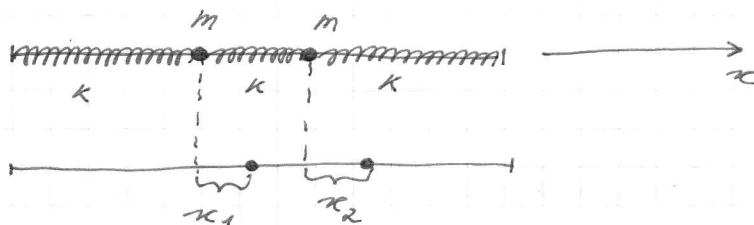
$$\ddot{\kappa}_i + \omega_i^2 \kappa = 0$$

$$\kappa(t) = \sum_i \kappa_i$$



§26 Нормальные колебания и нормальные координаты

Расчет колебаний связанных маятников



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

Ур-ия движения связаны
связанными.

Сложим ур-ия и вычтем

Оказ., что можно найти
такие лнн. коорд. x_1, x_2 ,
что для них ур-ия дви-
жения независимы.

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -2k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1) = -3k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\theta_1 = x_1 + x_2$$

$$\theta_2 = x_2 - x_1$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0 & \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0 & \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

Нормальные координаты - коорд., которые при $\forall$ дви-
жении системы являются независимыми друг от друга

$$x_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

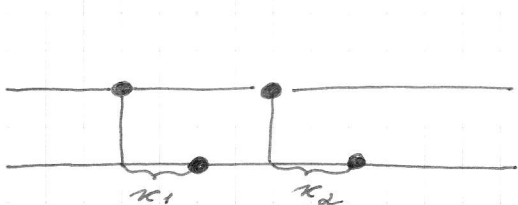
Можно подобрать мал. условия коорд. будет отлична
от 0 только одна из норм. коорд. (θ_1 или θ_2).

В этом случае x_1, x_2 будут зависеть по гармон.

закому на одной из собств. частот сист.
Такие колеб. наз-ат норм-ыми

Нормальные колеб. - гармонич. колебание на одной из собств. частот системы.

Чтобы наблюдать эти колеб., нужно правильно подобрать нач. условия



$$\theta_1 = x_1 + x_2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\theta_2 = x_2 - x_1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0$$

Первое нормальное колебание (ω_1)

$$\theta_2(t) = 0 \Rightarrow \theta_2(t=0) = 0 \Rightarrow x_1(t=0) = x_2(t=0)$$



Второе нормальное колебание (ω_2)

$$\theta_1(t) = 0 \rightarrow \theta_1(t=0) = 0$$

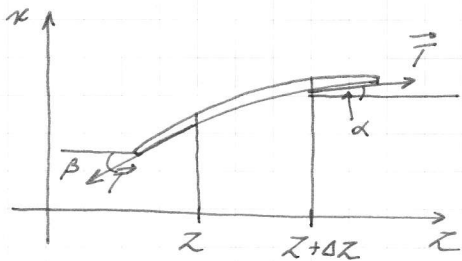
$$x_1(t=0) = -x_2(t=0)$$



§ 27 Механика волновых процессов.

Ваша - колебание, распростр. в сплошной среде.

Ваша в натянутой струне



$$\overbrace{\quad}^{m, l}$$

$$\rho = \frac{m}{l} \left[\frac{KL}{M} \right]$$

$$dl \approx dx$$

$$dm = \rho dz$$

$$dm \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T \sin \alpha - T \sin \beta \quad \alpha, \beta \ll 1$$

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{z+dz}$$

$$\sin \beta \approx \tan \beta = \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_z$$

$$dm \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T \left(\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{z+dz} - \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_z \right) = T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad v^2 \equiv \frac{T}{\rho} = \left[\frac{M^2}{C^2} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}} \quad - \text{волновое уравнение}$$

Решение:

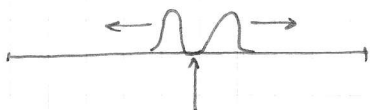
$$x(z, t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + v^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)$$

Скорость распространения волны

$z - vt = 0$ - зафиксируем

$z = vt$ (волна, время $0z$)



$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \left[\sqrt{\frac{\text{Н.м}}{\text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$$

Стоячие волны

Найдем частное реш. волнового ур-ня.

Стоячий волной наз-ся волна, описыв. прав. ф-ии времени на функцию коор.

Ищем решение в виде $x(z, t) = \theta(t) f(z)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f(z) \ddot{\theta}(t) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \theta(t) f''(z) \end{cases}$$

$f \ddot{\theta} = -v^2 \theta f''$. Разделим пер-ое

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -v^2 \frac{f''}{f} = \text{const}$$

$\uparrow$ не зав от z $\uparrow$ не зав от t

$\underbrace{\hspace{10em}}$
не зав
ни от чего

П.к. f и θ определены, то $\text{const} < 0$.

$$\text{const} = -\omega^2, \text{ м.к. } [\text{const}] = \text{с}^{-2}$$

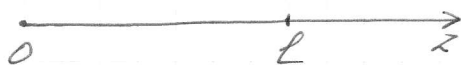
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

$$f'' + \frac{\omega^2}{v^2} f = 0 \quad \left[\frac{\omega}{v} \right] = \text{м}^{-1} \quad \boxed{\frac{\omega}{v} \equiv k} \text{ - волновое число}$$

$$f'' + k^2 f = 0$$

Частное реш-ие: $f(z) = A \sin kz$

Это решение должно удовле. гранич. условиям.



$$f(z=0) = 0$$

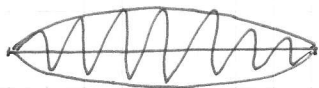
$$f(z=L) = 0$$

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

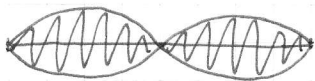
$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$k_n = \frac{\omega_n}{v} \Rightarrow \omega_n = v k_n \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} n \frac{\pi}{L}}$$

$n=1$ - основной тон



$n=2$ - обертоном



§ 2.8 Случайные события и вероятности

Случайное соб. - событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение к-го можно многократ. повторить

Вероятность случайного соб. - отношение числа появлений события в серии исп-т. к полному числу исп-т. в серии, когда число исп-т. $\rightarrow \infty$.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

$$0 \leq P \leq 1$$

↑ ↑
нельзя предсказать достоверное

Аксиома сложения вер-ей

Вероятность наступления одного из взаимоисключающих событий равна сумме их вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Аксиома умножения вер-ей

Вероятность наступл. двух незав. случ. событий равна произв. их вер-ей.

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Случайная величина - величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измер. которой можно многократ. повторить.

Распределение плотности вер-ти - отношение вероятн.

попадании случ. велич в малый интервал ширины заданного значения к ширине интервала, при стремлении длины инт. к 0.

$$\text{Обозн. } w(\kappa) = \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{p(\kappa_0 \leq \kappa \leq \kappa_0 + \Delta\kappa)}{\Delta\kappa}$$

Св-ва:

- $w \geq 0$

- $[w] = \frac{1}{[\kappa]}$

- условие нормировки

$$\int_{\kappa} w(\kappa) d\kappa = 1$$

Правило вычисления средних

$$\langle f(\kappa) \rangle = \int_{\kappa} f(\kappa) w(\kappa) d\kappa$$

Среднее значение

$$\langle \kappa \rangle = \int_{\kappa} \kappa w(\kappa) d\kappa$$

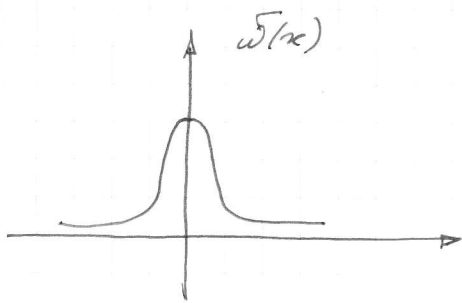
Дисперсия - средний квадрат откл-ия от среднего

$$\sigma^2 = \overline{(\kappa - \bar{\kappa})^2}$$

$$\sigma^2 = \int (\kappa - \bar{\kappa})^2 w(\kappa) d\kappa = \bar{\kappa}^2 - (\bar{\kappa})^2$$

Распределение Гаусса

$$w(\kappa) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\kappa^2/2\sigma^2}$$



$$-\infty < x < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad - \text{интеграл Гаусса}$$

Центральная пред. теор.

Сумма большого числа незав. случайных величин имеет Гауссово распредел. вер-ей.

Многомерная плотность вер-ей

Отношение вер-ей попад. нек. случай. вел. в малом интервале вокруг зад. знач. к произв. величин имт, когда интервалы $\rightarrow 0$.

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$w \geq 0, \quad [w] = \frac{1}{[xy]}, \quad \iint_{\Omega} w(x, y) dx dy = 1$$

Возвращение к средним

$$\langle f(x, y) \rangle = \iint_{\Omega} f(x, y) w(x, y) dx dy$$

Токи тепле порядка распредел

$$w(x) = \int_y w(x, y) dy$$

$$w(y) = \int_x w(x, y) dx$$

Независимое апри. вычисл.

$$w(x, y) = w_1(x) w_2(y)$$

§ 2.9 Распределение Гиббса

Основной закон стат. мех-ки равновесных систем:

В сост-ии термод. равновесия распредел. плотн. вер-ти для разложений сост-ий системы описов. формулой Гиббса:

$$w(z) = C e^{-\frac{H(z)}{kT}}, \quad z - \text{набор канонич. пер-ок (обобщ. коорд, обобщ. импульс)}$$

k - постоянная Больцмана $z = q, p$

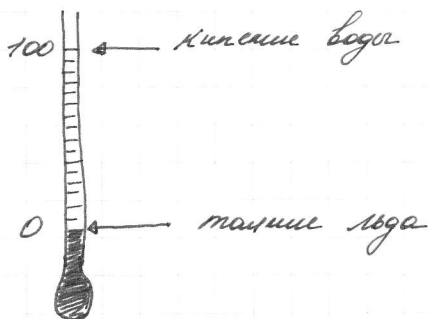
$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ H - гамильтониан системы
 $H = K + \Pi$

T - абсолютная темпер сист

$T = 273^\circ \text{C}$, C - нормир. конст

Температура - то, что измеряется термометром

Термометр



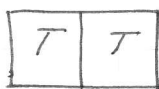
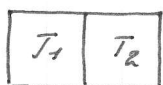
Чтобы измерить температ нужно ввести единицу измерения.

Эта единица - град. Цельсия

Градус Цельсия - $1/100$ часть интервала между темп. таян. льда и темп. кипящих воды при норм. давл.

Норм. давление 760 мм рт.ст

Период. равновесие - это сост.-ие, в котором сист., приходя к ней, может макс.-м быстро устроиться.



Неравновесное
сост.

Равновесное
сост.

Существование распредел. Гиббса

1) Распр-ие молекул по скоростям

$$\omega(v_x, v_y, v_z) = C e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} \quad \text{— распределение Максвелла}$$

$C = \text{const}$

m - масса молекулы

v_x, v_y, v_z - декарт. комп. скорости

Отсюда следует, что декарт. комп. скорости - незав. с.в. с одинаков. статист. характером. Каждая из них имеет распр.-ие Гаусса и нулевое ср. знач.-ие.

Вычислим дисперсию темп. скорости

$$\overline{v_x^2} = ?$$

$$\omega(v_x) = C e^{-mv_x^2/2kT}, \quad v_x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(v_x) dv_x = 1$$

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \omega(v_x) dv_x$$

Обозначим $\frac{2kT}{m} = v_0^2 \Rightarrow \omega(v_x) = C e^{-v_x^2/v_0^2}$

$$\frac{d(w(v_x))}{dv_x} = - \frac{dv_x}{v_0^2} w(v_x) \Rightarrow v_x w(v_x) = - \frac{v_0^2}{2} \frac{dw(v_x)}{dv_x}$$

$$\overline{v_x^2} = - \frac{v_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x dw = - \frac{v_0^2}{2} \left(v_x w(v_x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} w dv_x \right) =$$

$$= \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{v_0^2}{2} = \boxed{\frac{kT}{m}}$$

Отсюда следует, что средняя кин. энергия молекул пропорц. абс. темп. сред.

2) Распределение частиц во внешнем силовом поле.

$$w(x, y, z) = C e^{-\Pi(x, y, z)/kT} \quad \text{— распределение Больцмана}$$

x, y, z — декартовы координаты частицы

Пример поле силы тяжести

$$\Pi = \Pi(z) = mgz$$

$$w(z) = C e^{-mgz/kT}$$

Найдем среднюю высоту частиц над пов. Земли

$$\bar{z} = \int_0^{+\infty} z w(z) dz \quad \text{Введем } z_0 = \frac{kT}{mg}$$

$$w(z) = C e^{-z/z_0}$$

$$\int_0^{+\infty} w(z) dz = 1$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = - \frac{1}{z_0} w(z) \Rightarrow w(z) = - z_0 \frac{dw(z)}{dz}$$

$$\bar{z} = -z_0 \int_0^{+\infty} z d\omega = -z_0 \left(\underbrace{z\omega(z)}_0 \Big|_0^{+\infty} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \omega dz}_1 \right) = z_0 = \boxed{\frac{kT}{mg}}$$

§3. Размер и масса молекулы

Попробуем оценить размер и массу молекулы воздуха.

Возьмем давление газа в сосуде

N - число молекул

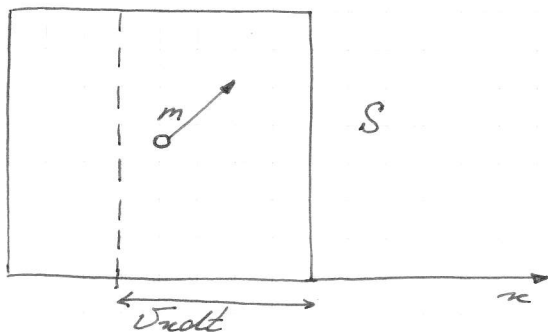
V - объем сосуда

T - температура (абс)

p - давление 1 Па $[\frac{H}{m^2}]$

Давление - отношение силы, действующ. по норм. к пов.-ти к площади этой пов.-ти.

760 мм рт.ст $\approx 10^5$ Па



Концентрация молекул $n = \frac{N}{V} [m^{-3}]$

Найдем элементарное давление

$$v_x \div v_x + dv_x$$

$$dp(v_x) = \frac{2m\bar{v}_x}{dt S} dN(v_x)$$

↑
число ударов частиц со скор v_x

$$dN(\vec{v}_x) = dV \, dn(\vec{v}_x) = \left. \begin{array}{l} dV = v_x dt S \\ dn(\vec{v}_x) = \frac{n}{w(\vec{v}_x)} d\vec{v}_x \end{array} \right\}$$

$$dp(\vec{v}_x) = 2m v_x v_x dt S n \frac{w(\vec{v}_x) d\vec{v}_x}{dt S} =$$

$$= 2 n m v_x^2 w(\vec{v}_x) d\vec{v}_x$$

$$p = \int dp = 2mn \int_0^{+\infty} v_x^2 w(\vec{v}_x) d\vec{v}_x = mn \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 w(\vec{v}_x) d\vec{v}_x}_{\overline{v_x^2}} =$$

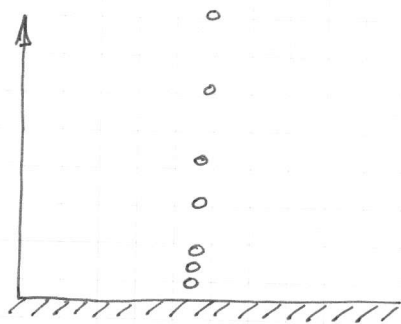
$$= nm \overline{v_x^2} = \boxed{nkT}$$

$$\boxed{p = nkT} \quad - \text{уравнение состояния идеального газа}$$

Далее возникает проблема измерения постоянной Больцмана

Опыт Терзема (1968 г.)

Наблюдается броуновское движение шариков аквариумной краски.



$$w(z) = C e^{-m g z / k T}$$

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg}$$

Поскольку частицы в жидкости, учитываем архимед. силу.

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg - F_A}$$

$$F_A = \rho_0 V g, \quad m = \rho V$$

$$\bar{z} = \frac{kT}{(\rho - \rho_0) V g}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 - \text{объем шарика}$$

$$\frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{8} = \frac{\pi R^3}{6}$$

$$\bar{z} = \frac{6kT}{(p-p_0)\pi D^3 g}$$

$$p_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$p = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\bar{z} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$D = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$k = \bar{z} \frac{(p-p_0)\pi D^3 g}{6T} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$$

Найдем массу и размер молекулы

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}, T_0 = 273 \text{ К}$$

$$p = nkT \Rightarrow n = \frac{p}{kT}$$

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{10^5 \text{ Па}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}} \cdot 273 \text{ град}} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Масса молек.

число Авогадро

Плотность воздуха при норм. усл. $\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot m_0}{V} = n_0 m_0$

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0} = \frac{1,3 \text{ кг/м}^3}{2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

Размер молекулы

В жидком сост. плотность в-ва $\approx$ плотности одной молекулы.

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3 - \text{плотн. жидк. возд.}$$

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{d_0^3} \quad d_0 = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho_0}} = \sqrt[3]{\frac{0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}}{10^3 \text{ кг/м}^3}} =$$

$$= \text{м} \cdot \sqrt[3]{10^{-30}} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Средняя скорость теплового дви.

$$v = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

$$T = 300 \text{ К} \quad m = 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

$$v = 300 \text{ м/с}$$



Факты, подтверждающие распр-ие Тьюка

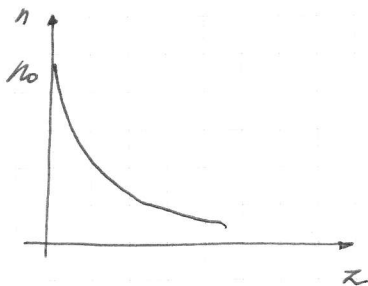
1) Свойства идеального газа

$$n = \frac{N}{V} \quad \frac{pV}{T} = Nk = \text{const}$$

2) Распределение воздуха в атм. Закон

$$w(z) = C e^{-mgz/kT}$$

$$n(z) = n_0 e^{-mgz/kT}$$



$$\bar{z} = \frac{kT}{mg} \approx 8 \text{ км}$$

§31 Распределение энергии по степеням свободы

Закон равнораспределения энергии

В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одна энергия

$$E = kT/2, \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Квадр. степень свободы - переменная, влияющая на энергию в Гамильтониане пропорц. квадрату этой пере-ой.

$$H(z) = a z_1^2 + H'(z'), \quad z = \{z_1, z'\}$$

$$a = (z')$$

Пример (распределение в гравит. силовом поле)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

$$E = \overline{az_1^2} = \int az_1^2 w(z) dz$$

$$w(z) = C e^{-\mathcal{H}(z)/kT}$$

$$E = \int az_1^2 C e^{-\mathcal{H}'(z')/kT} \cdot e^{-az_1^2/kT} dz =$$

$$= C \int dz' a e^{-\mathcal{H}'(z')/kT} \cdot \underbrace{\int dz z_1^2 e^{-az_1^2/kT}}_Y$$

$$Y = \int z_1^2 e^{-az_1^2/kT} dz, \quad d(e^{-az_1^2/kT}) = e^{-az_1^2/kT} \left(-\frac{2a}{kT}\right) z_1 dz$$

$$Y = -\frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 d(e^{-az_1^2/kT}) = -\frac{kT}{2a} \left[z_1 e^{-az_1^2/kT} \right]_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az_1^2/kT} dz = \frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az_1^2/kT} dz$$

$$\overline{az_1^2} = C \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-\mathcal{H}'(z')/kT} \frac{kT}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az_1^2/kT} dz'$$

$$E = \frac{kT}{2} \int w(z) dz = \frac{kT}{2}$$

Пример (внутр. энергия идеального газа)

Внутр. энергия - среднее значение Гамильтониана сист.

$$U = \langle \mathcal{H} \rangle = \langle K \rangle + \langle \Pi \rangle$$

Для идеального газа $\Pi = 0$

$$U = \langle K \rangle = N \langle K_0 \rangle = N \frac{kT}{2} S, \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{числ. степеней} \\ \text{свободы} \end{matrix} \quad \begin{matrix} N - \text{число молекул} \\ S - \text{число степеней} \\ \text{свободы} \end{matrix}$$

$$S=3$$

$$S=5$$

$$S=6$$

Темпостойкость газа

($V = \text{const}$)

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{NkS}{2}$$

1 моль газа $N = N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ / моль

$N_A k = R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$

$$C_V = \frac{R}{2} S \Rightarrow \boxed{S = \frac{2C}{R}}$$

Воздух: $S=5$

§32 Диффузия и теплопроводн.

Диффузия - проникновение одного в-ва в другое.

Закон диффузии:

Плотность потока частиц пропорц. градиенту их концентрации.

$$j_k = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

j_k - плотность потока
 n - концентрация

x - координата

D - коэффициент диффузии



ΔN_k



$$j_k = \frac{\Delta N_k}{S \Delta t}$$

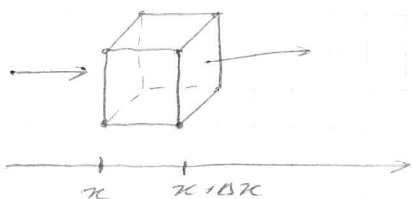
$$[j_k] = \left[\frac{1}{m^2 c} \right]$$

$$n = \frac{N}{V} = \left[\frac{1}{m^3} \right]$$

Коэффициент диффузии - коэфф. пропорционален скорости перемещения частиц к градиенту их концентрации.

$$[D] = \left[\frac{m^3 m}{m^2 c} \right] = \left[\frac{m^2}{c} \right] \text{ - темп распространения диффуз. процесса}$$

Для вывода ур-ия диффузии введем ур-ие, описывающее изменение числа частиц.



$$j_k = \frac{\Delta N_k}{S \Delta t}$$

$$\Delta N_k = j_k S \Delta t$$

$$\Delta N^{(+)} = \Delta N_k(x) = S \Delta t j_k(x)$$

$$\Delta N^{(-)} = \Delta N_k(x + \Delta x) = S \Delta t j_k(x + \Delta x)$$

$$\Delta N = \Delta N^{(+)} - \Delta N^{(-)} =$$

$$= S \Delta t (j_k(x) - j_k(x + \Delta x))$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$j_k(x + \Delta x) = j_k(x) + \frac{\partial j_k}{\partial x} \Delta x$$

$$\Delta N = -S \Delta t \frac{\partial j_k}{\partial x} \Delta x, \quad S \Delta x = \Delta V$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{\Delta n}{\Delta V} = -\Delta t \frac{\partial j_k}{\partial x}$$

↑
изм. конц.

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{\partial j_k}{\partial x}, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial x} = 0}$$

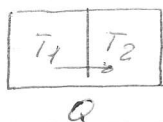
$$j_k = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$$

ур-ие описывающее изменение числа частиц.

$$\boxed{\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x}} \quad \text{- уравнение диффузии}$$

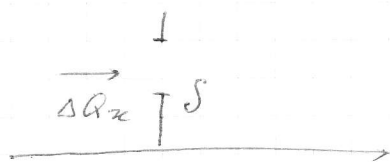
Теплопроводность - перенос тепла в неподвижно нагретом теле.



Закон теплопроводн.

Плотность потока тепла пропору. градиенту темпер.

$$J_{\kappa} = - \chi \frac{\partial T}{\partial x}$$



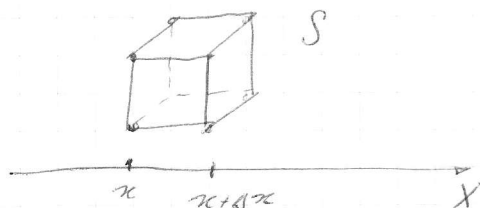
$$J_{\kappa} = \frac{\Delta Q_{\kappa}}{S \Delta t} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}} \right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$$

Коэфф. теплопров. - коэфф. пропору. между плотностью потока тепла и градиентом температур

$$[\chi] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{гр}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{гр}}$$

Уравнение сохранения энергии:

$$J_{\kappa} = \frac{\Delta Q_{\kappa}}{S \Delta t} \rightarrow \Delta Q_{\kappa} = S \Delta t J_{\kappa}$$



$$\Delta Q^{(+)} = S \Delta t J_{\kappa}(x)$$

$$\Delta Q^{(-)} = S \Delta t J_{\kappa}(x + \Delta x)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q^{(+)} - \Delta Q^{(-)} = S \Delta t (J_{\kappa}(x) - J_{\kappa}(x + \Delta x)) = \\ &= - S \Delta t \frac{\partial J_{\kappa}}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta V = S \Delta x$$

$$\Delta Q = C_m \Delta T = C \Delta V \rho \Delta T$$

$$C \rho \Delta V \Delta T = - \Delta V \Delta t \frac{\partial T}{\partial x} \quad \Delta V \rightarrow 0$$

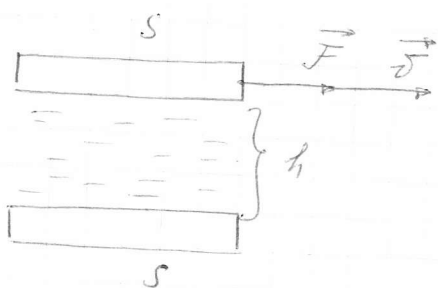
$$C \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$T_x = \chi \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] - \text{уравнение теплопроводн.}$$

Вязкость жидкости

Свойство жидкости препятствовать или замедлять сдвигу.
с ней тел.

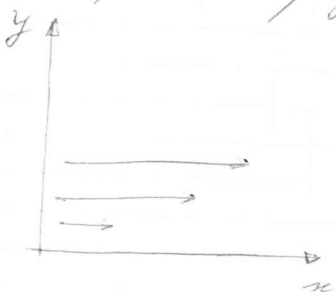


$$F \sim \sigma \frac{S}{h} - \text{закон Ньютона}$$

Напряжение сдвига - отношение силы, действ. паралл. поверхности к площади этой поверхности

$$\frac{F}{S} [\text{Па}]$$

Температурный градиент скорости:



$$\frac{\partial v}{\partial y} [c^{-1}]$$

$$\frac{F}{S} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{F}{S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}} \quad - \text{ закон вязкости}$$

Напряжения сдвига пропорц. поперечному градиенту скорости

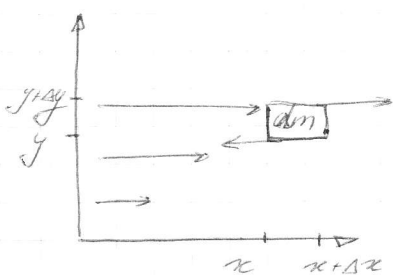
η - коэффициент вязкости

Коэффициент пропорц. между напряж. сдвига и поперечным градиентом скорости

$$[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$$

Для воды: $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$

Уравнение движения вязкой жидкости



$$F = S \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

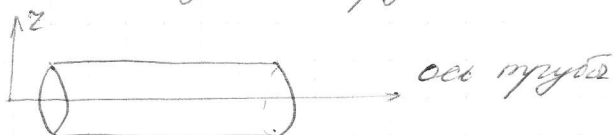
$$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = S \eta \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y+dy} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y+dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_y + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy$$

$$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = S \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \Rightarrow \left| \begin{array}{l} S dy \cdot dV \\ dm = \rho dV \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

Течение воды в трубе



Δp (Па) - разность давл.

$$\frac{\Delta p \pi r^2}{2\pi r l} = -\gamma \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{4\eta l}$$

маленький попер. утол.

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + C$$

$$v(r=R) = 0$$

$$v(r)C = \frac{\Delta p r^2}{4\eta l} \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{dV}{t} = 2\pi r dr v(r)$$

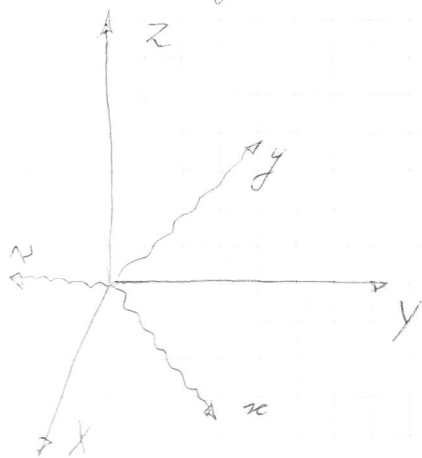
$$\frac{V}{t} = \int \frac{dV}{t} = 2\pi \int_0^R r v(r) dr = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V}{t} = \pi \frac{\Delta p}{8\eta l} R^4} \quad \text{закон Пуазейля}$$

§ 33 Теория вращающегося твердого тела.

Главная ось вращения.

Рассм. движение тела с одной неизм. точкой.



XYZ - лаборатор. сист. коорд.

xyz - система тела.

Знаем величину моментов:

$$\vec{N} = \vec{M}, \quad \vec{N} = \sum_i \vec{N}_i$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

По рез. § 3 $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, где $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

$$\vec{N}_i = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]]$$

$$\vec{N}_i = m_i \{ \vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \},$$

Спроектируем это векторное произв-во на ось перпендикулярно скорости движения.

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$(\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

$$\vec{N}_i = m_i \{ \vec{\omega} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}$$

$$N_{ix} = m_i \{ \omega_x x_i^2 + \omega_y y_i^2 + \omega_z z_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}$$

$$(x_i, y_i, z_i) = \text{const}$$

$\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ - функции времени.

?

$$N_{ix} = m_i \{ \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \}$$

Аналогично:

$$N_{iy} = m_i \{ -y_i x_i \omega_x + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - y_i z_i \omega_z \}$$

$$N_{iz} = m_i \{ -z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + \omega_z (x_i^2 + y_i^2) \}$$

Спроецируем на все три оси тела

$$N_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$N_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$N_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

моменты инерции
относительно осей x, y, z

$$J_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i = J_{yx}$$

$$J_{xz} = - \sum_i m_i x_i z_i = J_{zx}$$

$$J_{yz} = - \sum_i m_i y_i z_i = J_{zy}$$

$$\vec{N} = J \vec{\omega}$$

↑
тензор инерции твердого тела

Тензор инерции - скалярная, заданная связь ген. мом. момента инерции тела и угловой скор. вращения тела в сист. отсчета, жестко связан с телом.

Главная ось инерции - ось координат, в которой тензор инерции является диагональным.

(x, y, z)

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad J_x, J_y, J_z - \text{главные моменты инерции.}$$

$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x \\ N_y = J_y \omega_y \\ N_z = J_z \omega_z \end{cases} \quad \text{Заметим, что } \vec{N} \text{ и } \vec{\omega} \text{ всегда совпадают по направлению друг другу.}$$

Пример:

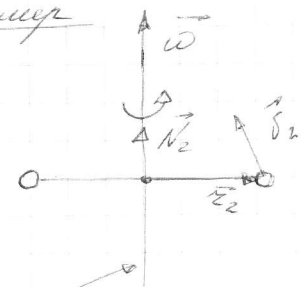
Пусть тело вращается вокруг одной из главных осей

$$\omega_x \neq 0, \omega_y = 0, \omega_z = 0.$$

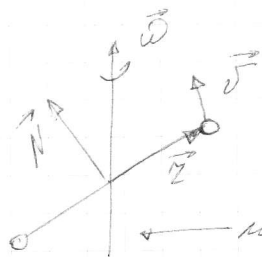
$$N_x \neq 0, N_y = 0, N_z = 0$$

Различим главную ось вращения тем, что при вращении вокруг этих осей $\vec{N}$ и $\vec{\omega} \parallel$ друг другу.

Пример



равная ось

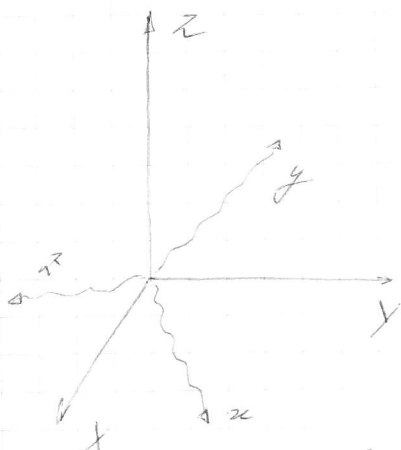


не равная ось

$$N_2 = m [\dot{z}_2, \ddot{z}_2]$$

Если тело движется симметрично, то ось симметрии этого тела будет главной осью этого тела.

§ 34 Динамика вращающегося тела.
Уравнения Эйлера.



$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

$\frac{d\vec{N}}{dt}$ - производная по времени от вектора $\vec{N}$ в инерциальной с. о.

$\dot{\vec{N}}$ - производная по времени от вектора $\vec{N}$ в с. о. вращающегося тела.

$$\vec{N} = \vec{e}_1' N_x + \vec{e}_2' N_y + \vec{e}_3' N_z$$

$$\begin{aligned} d\vec{N} &= \vec{e}_1' dN_x + \vec{e}_2' dN_y + \vec{e}_3' dN_z + \\ &+ N_x d\vec{e}_1' + N_y d\vec{e}_2' + N_z d\vec{e}_3' = \\ &= d'\vec{N} + [\vec{\omega}, \vec{N}] dt \end{aligned}$$

$$\S 3 \rightarrow \vec{\omega} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] dt$$

$$\begin{cases} d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] dt \\ d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2'] dt \\ d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3'] dt \end{cases}$$

Продифференцируем по dt

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{M}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \omega_x & I_y \omega_y & I_z \omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1' (I_z - I_y) \omega_y \omega_z + \vec{e}_2' (I_x - I_z) \omega_x \omega_z +$$

$$+ \vec{e}_3' (I_y - I_x) \omega_x \omega_y$$

Симметричный тензор массовых моментов на оси координат связан с телом.

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases} \Rightarrow \text{система ур-ий с точкой}$$

$$\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t).$$



уравнения Эйлера

Пример:

Освободное вращение симметричного тела.

$$\vec{M} = 0$$

Симм. вращение - тело, у которого выполняются 2 из 3 условий момента инерции.

$$\text{Ж } I_x = I_y \equiv I_A \neq I_z \equiv I_B$$

$$\omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const}$$

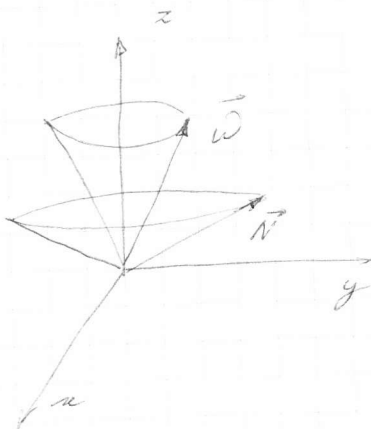
$$\begin{cases} I_A \dot{\omega}_x + (I_B - I_A) \omega_y \omega_{z0} = 0 \\ I_A \dot{\omega}_y + (I_B - I_A) \omega_x \omega_{z0} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{I_B - I_A}{I_A} \omega_{z0} = \Omega = \text{const}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y + \Omega \omega_x = 0 \end{cases}$$

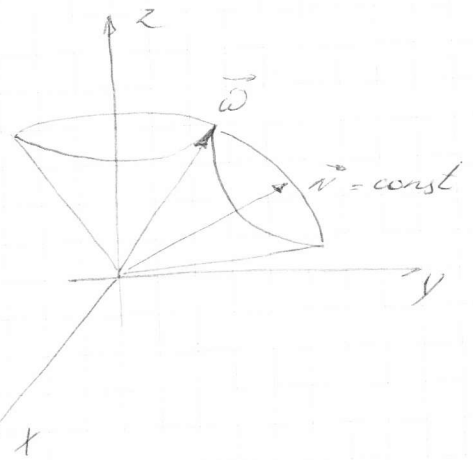
$$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_x = 0$$

$$\omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$



В инерциальной сист.

$$\dot{\vec{N}} = \ddot{\vec{N}} = 0 \Rightarrow \vec{N} = \text{const}$$



Свободный гири. Вращая гири так,
что ось гири ст. была направлена
в центр, компенсируя без пром.
по пов-ти другого гири.

Уравнение для матрицы поворота

$$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j', \quad ij = 1, 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}_{ij} = (\vec{e}_i, \dot{\vec{e}}_j') \\ \dot{\vec{e}}_j' = [\omega, \vec{e}_j'] \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{S}_{ij} = (\vec{e}_i, [\omega, \vec{e}_j'])$$